УДК 517.948.00

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО МЕТОДА ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ УСЛОВИИ КУСОЧНОЙ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ[1]

Т.С. Камалтдинова[2]

Нелинейным методом проекционной регуляризации, приведенном в [1], получено приближенное решение обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности. Получены оценки погрешности приближенного решения в классе кусочно-гладких функций. Эти оценки гораздо лучше, чем известные ранее оценки оптимальных и оптимальных по порядку методов решения данной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, регуляризация, оценка погрешности, некорректная задача, преобразование Фурье.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t\in(0,T], T>1, \tag{1}$$

где $u(x,t)\in C\{(-\infty,\infty)\times[0,T]\}\cap C^{2,1}\{(-\infty,\infty)\times(0,T]\}$, $\forall t\in(0,T]$ $u(x,t)$, $u''_{xx}(x,t)\in L_1(-\infty,\infty)\cap L_2(-\infty,\infty)$ и существует функция $\chi(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ такая, что

$$|u(x,t)|+\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|\le\chi(x); x\in(-\infty,\infty).$$

Пусть нам дано распределение температуры $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)\cap L_2(-\infty,\infty)$ в момент времени T

$$f(x)=u(x,T); \quad -\infty<x<\infty, \tag{2}$$

а начальное распределение

$$u_0(x)=u(x,0) \tag{3}$$

требуется определить.

Предположим, что при $f(x)=f_0(x)$ существует $u_0(x)$ такое, что производная $u_0'(x)$ является четной, кусочно-непрерывной функцией и $u_0(x), u_0'(x)\in L_2(-\infty,\infty)\cap L_1(-\infty,\infty)$, а также решение задачи (1), (3) при нем удовлетворяет условию $u(x,T)=f_0(x)$, но точное значение $f_0(x)$ нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение $f_\delta(x)\in L_1(-\infty,\infty)\cap L_2(-\infty,\infty)$ и $\delta>0$ такие, что

$$\|f_\delta(x)-f_0(x)\|_{L_2}\le\delta. \tag{4}$$

Требуется, используя исходные данные (f_δ,δ) задачи (1), (2), (4), определить приближенное решение $u_\delta(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ и оценить величину $\|u_\delta(x)-u_0(x)\|_{L_2}$.

Используя для решения задачи (1), (2), (4) преобразование Фурье F, получим

$$\hat{u}_t'(\lambda,t)=-\lambda^2\hat{u}(\lambda,t); \quad \lambda\in(-\infty,\infty), \quad t\in(0,T] \tag{5}$$

и

$$\hat{u}(\lambda,T)=\hat{f}(\lambda); \quad \lambda\in(-\infty,\infty), \tag{6}$$

где $\hat{u}(\lambda,t)=F[u(x,t)]$, а $\hat{f}(\lambda)=F[f(x)]$.

---

[1] Работа поддержана грантом РФФИ № 10–01–96000_ р_ урал_а

[2] Камалтдинова Татьяна Сергеевна – старший преподаватель, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет. e-mail: KamaltdinovaTS@mail.ru

Решая задачу (5), (6), сведем ее к операторному уравнению

$$A\hat{u}(\lambda)=e^{-\lambda^2 T}\hat{u}(\lambda)=\hat{f}(\lambda);\quad \hat{u}(\lambda),\hat{f}(\lambda)\in L_2(-\infty,\infty). \tag{7}$$

Из условий, которым удовлетворяет функция $u_0(x)$, будет следовать существование числа $a>0$ такого, что для любого достаточно малого числа $\varepsilon>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[1+|\lambda|^{3(1-\varepsilon)}\right]|\hat{u}_0(\lambda)|^2\,d\lambda\le\frac{a}{\varepsilon}, \tag{8}$$

а из (4) и теоремы Планшереля [3, с. 411], что

$$\left\|A\hat{u}_0(\lambda)-\hat{f}_\delta(\lambda)\right\|\le\delta, \tag{9}$$

где $\hat{u}_0(\lambda)=F\left[u_0(x)\right]$, а $\hat{f}_\delta(\lambda)=F\left[f_\delta(x)\right]$.

Применяя к решению задачи (7)–(9) метод проекционной регуляризации [1], введем регуляризующее семейство операторов $\{P_\alpha:\alpha>0\}$, определяемых формулой

$$P_\alpha\hat{f}(\lambda)=\begin{cases}e^{\lambda^2 T}\hat{f}(\lambda); & |\lambda|\le\alpha\\ 0; & |\lambda|>\alpha\end{cases}. \tag{10}$$

Таким образом, приближенное решение $\hat{u}_\delta^\alpha(\lambda)$ в уравнении (7) определим формулой

$$\hat{u}_\delta^\alpha(\lambda)=P_\alpha\hat{f}_\delta(\lambda), \tag{11}$$

а для выбора параметра регуляризации $\alpha=\alpha\left(\hat{f}_\delta,\delta\right)$ в формуле (11) используем уравнение

$$\left\|A\hat{u}_\delta^\alpha(\lambda)-\hat{f}_\delta(\lambda)\right\|_{L_2}^2=16\delta^2. \tag{12}$$

Из (11) и (12) определим приближенное решение $\hat{u}_\delta(\lambda)$ уравнения (7) формулой

$$\hat{u}_\delta(\lambda)=\hat{u}_\delta^{\alpha\left(\hat{f}_\delta,\delta\right)}(\lambda).$$

Из теоремы, доказанной в [1], и формул (7), (8), (9) следует оценка

$$\left\|\hat{u}_\delta(\lambda)-\hat{u}_0(\lambda)\right\|\le 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}G\left[\bar{\alpha}(\delta)\right], \tag{13}$$

в которой функция $G_\varepsilon(\sigma)$, следуя (7) и (8), определяется параметрически

$$\begin{cases}\sigma=e^{-\lambda^2 T} & \lambda\in(-\infty,\infty)\\ G_\varepsilon(\sigma)=\left[1+|\lambda|^{3(1-\varepsilon)}\right]^{-\frac{1}{2}}, & \end{cases}. \tag{14}$$

а $\bar{\alpha}(\delta)$ – уравнением

$$\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}G_\varepsilon(\alpha)\alpha=\delta. \tag{15}$$

Так как оценка (13) выполняется при любом $\varepsilon\in(0,1]$, то выберем значение $\varepsilon(\delta)$, минимизирующее эту оценку. Ввиду непрерывности функции $7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}G_\varepsilon\left(\bar{\alpha}(\delta,\varepsilon)\right)$ по ε на полуотрезке $(0,1]$ и стремление ее к бесконечности при $\varepsilon\to 0$ следует существование $\varepsilon(\delta)\in(0,1]$ такого, что

$$7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon(\delta)}}G_{\varepsilon(\delta)}\left(\bar{\alpha}(\delta,\varepsilon(\delta))\right)=\min_{\varepsilon\in(0,1]}7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}G_\varepsilon\left(\bar{\alpha}(\delta,\varepsilon)\right). \tag{16}$$

Тогда из (13)–(16) для $\hat{u}_\delta(\lambda)$ будет справедлива оценка

$$\left\|\hat{u}_\delta(\lambda)-\hat{u}_0(\lambda)\right\|\le 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon(\delta)}}G_{\varepsilon(\delta)}\left[\bar{\alpha}\left(\delta,\varepsilon(\delta)\right)\right]. \tag{17}$$

Применяя к $\hat{u}_\delta(\lambda)$ обратное преобразование Фурье F^{-1} и беря действительную часть, получим приближенное решение $u_\delta(x)=\mathrm{Re}\left[F^{-1}\left(\hat{u}_\delta(\lambda)\right)\right]$ обратной задачи (1), (2), (4). Для этого решения, ввиду теоремы Планшереля [3, с. 411], будет справедлива оценка (17).

Для сравнения (17) с известными, оценим правую часть соотношения (17) в элементарных функциях.

Из (14) следует, что при достаточно малых значениях σ справедливо соотношение

$$G_\varepsilon(\sigma)\le T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\frac{1}{\sigma}, \tag{18}$$

а из (18) и того, что

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{G(\sigma)}{T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\frac{1}{\sigma}}=1,$$

следует, что при достаточно малых значениях σ

$$T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\sigma^2<\sigma G_\varepsilon(\sigma). \tag{19}$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\alpha^2=\delta. \tag{20}$$

Решение $\hat{\alpha}(\delta,\varepsilon)$ уравнения (20) определяется формулой

$$\hat{\alpha}(\delta,\varepsilon)=T^{-\frac{3}{8}(1-\varepsilon)}\left[\delta\sqrt{\frac{\varepsilon}{a}}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Из (15), (19) и (20) следует, что

$$\bar{\alpha}(\delta,\varepsilon)\le\hat{\alpha}(\delta,\varepsilon). \tag{22}$$

Таким образом, из (13), (18) и (22) следует, что

$$\left\|u_\delta(x)-u_0(x)\right\|\le 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\frac{1}{\hat{\alpha}(\delta,\varepsilon)}. \tag{23}$$

Из (21) и (23) окончательно получим

$$\left\|u_\delta(x)-u_0(x)\right\|\le 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}(2T)^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\left[T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon\delta}}\right]. \tag{24}$$

В оценке (24) значение $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$ определим формулой

$$\varepsilon(\delta)=\frac{2a}{\ln\ln\frac{1}{\delta}}. \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует, что

$$\left\|u_\delta(x)-u_0(x)\right\|\le\frac{7}{2}\sqrt{2}(2T)^{\frac{3}{4}}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\delta}}\ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon(\delta))}\left[\frac{\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\delta}}}{\sqrt{2}\delta}\right]. \tag{26}$$

Если $\ln\ln\frac{1}{\delta_0}\ge\sqrt{2}$, то при $\delta\in(0,\delta_0]$ из (26) следует, что

$$\left\|u_\delta(x)-u_0(x)\right\| \le \frac{7}{2}\sqrt{2}(2T)^{\frac{3}{4}}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\delta}}\ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon(\delta))}\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{27}$$

Так как

$$\ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon(\delta))}\left(\frac{1}{\delta}\right)=\ln^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{\delta}\right)\cdot\ln^{\frac{3a}{2\ln\ln\frac{1}{\delta}}}\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

а

$$\ln\left[\ln^{\frac{3a}{2\ln\ln\frac{1}{\delta}}}\left(\frac{1}{\delta}\right)\right]=\frac{3a}{2\ln\ln\frac{1}{\delta}}\ln\ln\frac{1}{\delta}=\frac{3a}{2},$$

то из (27) следует, что

$$\left\|u_\delta(x)-u_0(x)\right\| \le \frac{7}{2}\sqrt{2}e^{\frac{3a}{2}}(2T)^{\frac{3}{4}}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\delta}}\ln^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{\delta}\right)=7\sqrt{2}e^{\frac{3a}{2}}T^{\frac{3}{4}}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\delta}}.\ln^{-\frac{3}{4}}\frac{1}{\delta}.$$

Литература

1. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2006. – Т. 9, №. 4. – С. 353–368.
2. Колесникова, Н.Ю. О проблеме потери точности при преобразовании информации / Н.Ю. Колесникова, Т.Н. Рудакова, А.В. Танана // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2010. – Вып. 11. – № 2(178). – С. 56–62.
3. Колмогоров, А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / М.: Наука, 1972. – 496 с.

Поступила в редакцию 23 июня 2010 г.

ABOUT ERROR ESTIMATE OF NONLINEAR PROJECTION REGULARIZATION METHOD UNDER THE CONDITION OF PRIECE-WISE SMOOTHNESS OF SOLUTION

***T.S. Kamaltdinova*[1]**

An approximate solution for the inverse Cauchy problem for the heat conduction equation is obtained by means of nonlinear projection regularization method. Error estimates for the approximate solution are obtained in the class of piecewise smooth functions. These estimates are better then the known estimates for the optimal and the order- optimal methods of solving the problem.

Keywords: reverse problem, regularization, error estimate, ill-defined problem, direct Fourier transform.

References

1. Tanana V.P., Yaparova N.M. *Sib. zhurn. vychisl. matem.* 2006. Vol. 9, no. 4. pp. 353–368. (in Russ.).
2. Kolesnikova N.Yu., Rudakova T.N., Tanana A.V. *Vestnik YuUrGU. Seriia «Komp'iuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika»*. 2010. Vol. 11, no. 2(178). pp. 56–62. (in Russ.).
3. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza (Elements of Function Theory and Functional Analysis). Moscow, Nauka, 1972. 496 p. (in Russ.).

[1] Kamaltdinova Tatyana Sergeevna is a Senior Lecturer, Numerical Mathematics Department, South Ural State University.
e-mail: KamaltdinovaTS@mail.ru