УДК 517.948

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ МЕТОДА М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ОШИБКОЙ В ОПЕРАТОРЕ

А.Б. Бредихина[1]

Исследован метод М.М. Лаврентьева для уравнений с приближенно заданным оператором на оптимальность. Получена точная оценка погрешности данного метода.

Ключевые слова: операторное уравнение, оптимальный метод, оценка погрешности.

Введение

В работе [1] была доказана оптимальность метода М.М. Лаврентьева при точно заданном операторе и специально выбранном параметре регуляризации, и получены точные оценки погрешности этого метода. В настоящей статье этот результат обобщен на уравнения с приближенно заданным оператором.

1. Постановка задачи

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $B[H]$ – пространство линейных ограниченных операторов, отображающих пространство H в H, $B_1[H]$ – подмножество пространства $B[H]$, состоящее из инъективных операторов, $\mathcal{A} \subset B[H]$.

Рассмотрим операторное уравнение первого рода:

$$Au = f;\ u, f \in H. \tag{1}$$

Предположим, что при $f = f_0$ и $A \in \mathcal{A}$ уравнение (1) имеет точное решение u_0, принадлежащее множеству $M_r = B\overline{S}_r$, где $B \in B[H]$, а $\overline{S}_r = \left\{v : v \in H, \|v\| \le r\right\}$. Но точные значения правой части f_0 уравнения (1) и оператора A нам неизвестны. Вместо них даны некоторые приближения $f_\delta \in H$ и $A_h \in \mathcal{A} \cap B_1[H]$, а также уровни их погрешности $\delta, h \ge 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$ и $\|A_h - A\| \le h$.

Требуется, используя априорную информацию $M_r, \mathcal{A}, f_\delta, A_h, \delta, h$, определить приближенное решение $u_{\delta h}$ уравнения (1) и оценить его уклонение от точного решения u_0.

2. Основные понятия и обозначения

В дальнейшем, если $A \ne A^*$, то, предположив, что множество значений $R(A^*)$ всюду плотно в H, воспользуемся полярным представлением оператора A:

$$A = Q\overline{A}, \tag{2}$$

где Q – унитарный оператор, а $\overline{A} = \sqrt{A^*A}$.

Таким образом, используя равенство (2), уравнение (1) можно заменить эквивалентным

$$\overline{A}u = g, \tag{3}$$

где $g = Q^* f$, а Q^* – унитарный оператор, сопряженный с Q.

Класс операторов $\mathcal{A}$ определим следующим образом:

$$\mathcal{A} = \left\{\overline{A} : \overline{A} \in B[H],\ \overline{A} \ge 0,\ \overline{A}^* = \overline{A}\ и\ A_h - \overline{A} = \varphi(A_h),\ \varphi \in \Phi\right\}, \tag{4}$$

где Φ – множество кусочно-непрерывных на отрезке $\left[0, \|A_h\|\right]$ функций, $A_h \in B[H]$, $A_h^* = A_h\ и\ A_h > 0$.

Оператор $B \in B[H]$ определим формулой $B = G_h(A_h)$, где $G_h \in C^1\left[0, \|A_h\|\right]$ и для любого

[1] Бредихина Анна Борисовна – ассистент, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.
e-mail: bredihina@prima.susu.ac.ru

$\sigma \in \left(0, \|A_h\|\right)$ $G_h{}' > 0$, а $G_h(0) = 0$.

Обозначим через $g_0 = Q^* f_0$, а $g_\delta = Q^* f_\delta$.

Определение 1. Семейство операторов $\left\{T_{\delta h} : 0 < \delta \le \delta_0, 0 < h \le h_0\right\}$, отображающих множество $\mathcal{A} \times H$ в H, будем называть **методом приближенного решения** уравнения (3) на множестве $M_r \times \mathcal{A}$, если для любых $\delta \in (0, \delta_0)$ и $h \in (0, h_0)$, и для любого $A_h \in \mathcal{A} \cap B_1[H]$, $T_{\delta h}\left[A_h;\ \bullet\right] \in B[H]$ и $T_{\delta h}\left[A_h;\ g_\delta\right] \to u_0$ при $\delta, h \to 0$ равномерно на множестве M_r при условии, что $\bar{A} \in \mathcal{A} \cap B_1[H]$, $\left\|A_h - \bar{A}\right\| \le h$ и $\left\|g_\delta - \bar{A}u_0\right\| \le \delta$.

Введем количественную характеристику точности этого метода при фиксированных $A_h \in \mathcal{A} \cap B_1[H]$ и $\delta \in (0, \delta_0]$

$$\Delta_{\delta h}[T_{\delta h}] = \sup_{u, \bar{A}, g_\delta} \left\{\left\|u - T_{\delta h}[A_h; g_\delta]\right\| : u \in M_r,\ \bar{A} \in \mathcal{A},\ \left\|A_h - \bar{A}\right\| \le h,\ \left\|g_\delta - \bar{A}u\right\| \le \delta\right\}, \tag{5}$$

и величину

$$\Delta_{\delta h}^{opt} = \inf\left\{\Delta_{\delta h}[P] : P \in B\left[H \times \{A_h\}, H\right]\right\}, \tag{6}$$

где $B\left[H \times \{A_h\}, H\right]$ – пространство линейных ограниченных операторов, отображающих пространство $H \times \{A_h\}$ в H, а

$$\Delta_{\delta h}[P] = \sup_{u, \bar{A}, g_\delta} \left\{\left\|u - P[A_h; g_\delta]\right\| : u \in M_r,\ \bar{A} \in \mathcal{A},\ \left\|A_h - \bar{A}\right\| \le h,\ \left\|g_\delta - \bar{A}u\right\| \le \delta\right\}.$$

Определение 2. Метод $\left\{T_{\delta h}^{opt} : 0 < \delta \le \delta_0, 0 < h \le h_0\right\}$ будем называть **оптимальным** на классе $M_r \times \mathcal{A}$, если для любых $\delta \in (0, \delta_0]$ и $h \in (0, h_0]$

$$\Delta_{\delta h}[T_{\delta h}^{opt}] = \Delta_{\delta h}^{opt}.$$

3. Оценка снизу для величины $\Delta_{\delta h}^{opt}$

Рассмотрим уравнение, связывающее параметры σ, h *и* δ,

$$rG_h(\sigma)\sigma = rG_h(\sigma)h + \delta. \tag{7}$$

Из свойств функции $G_h(\sigma)$ следует, что при выполнении условия

$$\|A_h\| > h + \frac{\delta}{rG_h\left(\|A_h\|\right)} \tag{8}$$

уравнение (7) имеет единственное решение $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\delta, h)$.

Теорема 1. Если уравнение (7) имеет решение $\bar{\sigma}(\delta, h)$, то справедлива следующая оценка:

$$\Delta_{\delta h}^{opt} \ge rG_h\left(\bar{\sigma}(\delta, h)\right).$$

Доказательство. Пусть ε – достаточно маленькое положительное число. Тогда наряду с уравнением (7) рассмотрим уравнение

$$rG_h(\sigma)\sigma = h(1 - \varepsilon)\left[rG_h(\sigma) - \varepsilon\right] + \delta. \tag{9}$$

Из равенства (9) следует, что при достаточно малых значениях δ *и* h, которые описываются условием аналогичным условию (8), уравнение (9) имеет единственное решение $\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)$.

Из непрерывности функции $G_h(\sigma)$ следует, что

$$\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h) \to \bar{\sigma}(\delta, h) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

Теперь, выбрав натуральное число n_0 таким образом, чтобы

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

и

$$rG_h\left(\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)\right) - rG_h\left(\frac{n_0 - 1}{n_0}\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta, h)\right) < \varepsilon, \tag{11}$$

рассмотрим подпространство H_0, определяемое формулой

$$H_0 = E_{\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta,h)}H - E_{\frac{n_0-1}{n_0}\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta,h)}H, \tag{12}$$

где $\{E_\sigma : 0 \le \sigma \le \|A_h\|\}$ – спектральное разложение единицы, порожденное оператором A_h.

Построим оператор $\bar{A}_0$ следующим образом:

$$\left(A_h - \bar{A}_0\right)u = \begin{cases} h\dfrac{A_h u}{\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta,h)}; & u \in H_0, \\ 0; & u \in H_0^{\perp}, \end{cases} \tag{13}$$

где $H_0^{\perp}$ – ортогональное дополнение подпространства H_0.

Таким образом, из (12) и (13) следует, что

$$A_h - \bar{A}_0 = \varphi(A_h), \tag{14}$$

где $\varphi \in \Phi$.

Пусть $v_0 \in H_0$ и $\|v_0\| = r$,

$$\|Bv_0\| > rG_h\left(\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta,h)\right) - \varepsilon, \tag{15}$$

$$g_\delta = 0. \tag{16}$$

Тогда из (11), (12) и (15) получаем

$$rG_h\left(\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta,h)\right) - \varepsilon < \|u_0\| \le rG_h\left(\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta,h)\right), \tag{17}$$

а из (12), (13), (17)

$$\left\|\left(A_h - \bar{A}_0\right)Bv_0\right\| \ge h\frac{n_0-1}{n_0}\left[rG_h\left(\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta,h)\right) - \varepsilon\right]. \tag{18}$$

Из (16)–(18) следует, что

$$\left\|\bar{A}_0 u_0 - g_\delta\right\| \le \delta. \tag{19}$$

Таким образом, из (16) для любого $P \in B[H]$

$$Pg_\delta = 0. \tag{20}$$

Из (6) и (16)–(20) следует, что

$$\Delta_{\delta h}^{opt} \ge rG_h\left(\bar{\sigma}_\varepsilon(\delta,h)\right) - \varepsilon, \tag{21}$$

а из произвольности ε, (10) и (21) получаем

$$\Delta_{\delta h}^{opt} \ge rG_h\left(\bar{\sigma}(\delta,h)\right). \tag{22}$$

Тем самым теорема доказана.

4. Оценка сверху для величины $\Delta_{\delta h}^{opt}$

В качестве регуляризующего семейства операторов для уравнения (3) рассмотрим семейство

$$T_\alpha^h = B[A_h B + \alpha E]^{-1},\ \alpha \in \left(0, \|A_h\|\right]. \tag{23}$$

За приближенное решение $u_{\delta h}^\alpha$ уравнения (3) примем элемент, определяемый формулой

$$u_{\delta h}^\alpha = T_\alpha^h g_\delta. \tag{24}$$

<u>**Лемма 1**</u>. Для любого $\alpha > 0$ оператор T_α^h, определяемый формулой (23), ограничен и

$$\left\|T_\alpha^h\right\| \le \max_{0 \le \sigma \le \|A_h\|} \frac{G_h(\sigma)}{\sigma G_h(\sigma) + \alpha}. \tag{25}$$

Доказательство. Так как $\left\|T_\alpha^h\right\| = \sup\left\{\left\|T_\alpha^h g\right\| : g \in H, \|g\| \le 1\right\}$, тогда

$$\left\|T_\alpha^h g\right\|^2 = \sup_{\|g\|\le 1}\left(T_\alpha^h g, T_\alpha^h g\right) = \sup_{\|g\|\le 1}\left(\left(T_\alpha^h\right)^2 g, g\right) = \sup_{\|g\|\le 1}\left(B^2[A_h B + \alpha E]^{-2} g, g\right).$$

Пусть $\left\{E_\sigma : 0 \le \sigma \le \|A_h\|\right\}$ – спектральное разложение единицы, порожденное оператором A_h, тогда

$$\left\|T_\alpha^h g\right\|^2 = \sup_{\|g\|\le 1}\left\{\int_0^{\|A_h\|}\frac{G_h{}^2(\sigma)}{\left[\sigma G_h(\sigma)+\alpha\right]^2}d\left(E_\sigma g, g\right)\right\} \le$$

$$\le \sup_{0\le\sigma\le\|A_h\|}\frac{G_h{}^2(\sigma)}{\left[\sigma G_h(\sigma)+\alpha\right]^2}\sup_{\|g\|\le 1}\int_0^{\|A_h\|}d\left(E_\sigma g, g\right) = \sup_{0\le\sigma\le\|A_h\|}\frac{G_h{}^2(\sigma)}{\left[\sigma G_h(\sigma)+\alpha\right]^2}.$$

Так как функция $\dfrac{G_h{}^2(\sigma)}{\left[\sigma G_h(\sigma)+\alpha\right]^2}$ непрерывна на отрезке $\left[0, \|A_h\|\right]$, тогда найдется $\bar\sigma \in \left[0, \|A_h\|\right]$ такое, что $\dfrac{G_h{}^2(\bar\sigma)}{\left[\bar\sigma G_h(\bar\sigma)+\alpha\right]^2} = \sup\dfrac{G_h{}^2(\sigma)}{\left[\sigma G_h(\sigma)+\alpha\right]^2}$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 2. Для любых α *и* $r > 0$ справедливо соотношение

$$\sup_{\|v\|\le r}\left\|T_\alpha^h A_h B v - Bv\right\| \le r\alpha \max_{0\le\sigma\le\|A_h\|}\frac{G_h(\sigma)}{\sigma G_h(\sigma)+\alpha}.$$

Доказательство.

$$T_\alpha^h A_h B v - Bv = B\left[A_h B + \alpha E\right]^{-1} A_h B v - Bv = B\left[\left[A_h B+\alpha E\right]^{-1}A_h B - E\right]v = -\alpha B\left[A_h B+\alpha E\right]^{-1}v.$$

Тогда $\left\|T_\alpha^h A_h B v - Bv\right\| = \alpha\left\|B\left[A_h B+\alpha E\right]^{-1}v\right\|$. Если $v \ne 0$, то $\left\|T_\alpha^h A_h B v - Bv\right\| = \alpha\|v\|\left\|B\left[A_h B+\alpha E\right]^{-1}\dfrac{v}{\|v\|}\right\|$. Так как $\sup\limits_{\|v\|\le r}\left\|T_\alpha^h A_h B v - Bv\right\| = \sup\limits_{0<\|v\|\le r}\left\|T_\alpha^h A_h B v - Bv\right\|$, тогда

$$\sup_{\|v\|\le r}\left\|T_\alpha^h A_h B v - Bv\right\| = r\alpha\sup_{\|w\|\le 1}\left\|B\left[A_h B+\alpha E\right]^{-1}w\right\| = r\alpha\left\|T_\alpha^h\right\|. \tag{26}$$

Тогда из леммы 1 и (26) следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь оценку уклонения $\Delta(T_\alpha^h)$ приближенного решения $u_{\delta h}^\alpha$ уравнения (3) от точного решения u_0 на классе M_r:

$$\Delta(T_\alpha^h) = \sup_{u_0,\bar A, g_\delta}\left\{\left\|u_{\delta h}^\alpha - u_0\right\| : u_0 \in M_r, \bar A \in \mathcal{A}, \left\|\bar A u_0 - g_\delta\right\| \le \delta, \left\|\bar A - A_h\right\| \le h\right\}. \tag{27}$$

Введем обозначения:

$$\bar\Delta_1(\alpha) = \sup_{u_0}\left\{\left\|T_\alpha^h A_h u_0 - u_0\right\| : u_0 \in M_r\right\}, \tag{28}$$

$$\bar\Delta_2(\alpha, h) = \sup_{u_0,\bar A}\left\{\left\|T_\alpha^h A_h u_0 - T_\alpha^h \bar A u_0\right\| : u_0 \in M_r, \left\|\bar A - A_h\right\| \le h\right\}, \tag{29}$$

$$\bar\Delta_3(\alpha, \delta) = \sup_{u_0,\bar A, g_\delta}\left\{\left\|T_\alpha^h \bar A u_0 - T_\alpha^h g_\delta\right\| : u_0 \in M_r, \left\|g_\delta - g_0\right\| \le \delta\right\}. \tag{30}$$

Тогда имеет место очевидное неравенство

$$\Delta(T_\alpha^h) \le \bar\Delta_1(\alpha) + \bar\Delta_2(\alpha, h) + \bar\Delta_3(\alpha, \delta).$$

Рассмотрим оценку $\bar\Delta_1(\alpha)$. Так как $u_0 = Bv_0$ *и* $\|v_0\| \le r$, тогда согласно лемме 2

$$\left\|T_\alpha^h A_h u_0 - u_0\right\| = \left\|T_\alpha^h A_h B v_0 - Bv_0\right\| \le r\left\|B\left[A_h B+\alpha E\right]^{-1}A_h B - B\right\| = r\alpha\left\|T_\alpha^h\right\|.$$

Таким образом, для оценки $\bar\Delta_1(\alpha)$, определенной формулой (28), справедливо равенство

$$\bar\Delta_1(\alpha) = r\alpha\left\|T_\alpha^h\right\|. \tag{31}$$

А из того, что

$$\left\|T_\alpha^h A_h u_0 - T_\alpha^h \bar A u_0\right\| = \left\|T_\alpha^h (A_h - \bar A)u_0\right\| \le h\left\|T_\alpha^h\right\|\cdot\left\|Bv_0\right\|,$$

а $B = G_h(A_h)$, следует

$$\bar{\Delta}_2(\alpha, h) = rhG_h(\alpha) \cdot \left\| T_\alpha^h \right\|. \tag{32}$$

И, наконец,

$$\bar{\Delta}_3(\alpha, \delta) = \delta \left\| T_\alpha^h \right\|, \tag{33}$$

так как $\left\| T_\alpha^h \bar{A} u_0 - T_\alpha^h g_\delta \right\| = \left\| T_\alpha^h (\bar{A} u_0 - g_\delta) \right\| \le \delta \left\| T_\alpha^h \right\|$.

Тогда, учитывая равенства (31)–(33), получаем

$$\Delta(T_\alpha^h) \le (r\alpha + rhG_h(\alpha) + \delta) \left\| T_\alpha^h \right\|. \tag{34}$$

Теорема 2. Пусть значение параметра $\bar{\sigma}$ является решением уравнения (7), а

$$\bar{\alpha}(\delta, h) = \frac{G_h^{\,2}(\bar{\sigma})}{G_h'(\bar{\sigma})} - hG_h(\bar{\sigma}). \tag{35}$$

Тогда

$$\Delta(T_{\bar{\alpha}}^h) \le rG_h(\bar{\sigma}). \tag{36}$$

Доказательство. В силу лемм 1 и 2, а также учитывая неравенство (34), получаем, что

$$\left\| u_{\delta h}^\alpha - u_0 \right\| \le (r\alpha + rG_h(\alpha)h + \delta) \cdot \max_{0 < \sigma \le \|A_h\|} \frac{G_h(\sigma)}{\sigma G_h(\sigma) + \alpha}. \tag{37}$$

Рассмотрим функцию $F(\sigma, \alpha) = (r\alpha + rG_h(\alpha)h + \delta) \cdot \max\limits_{0 < \sigma \le \|A_h\|} \frac{G_h(\sigma)}{\sigma G_h(\sigma) + \alpha}$. Тогда при $\sigma = \bar{\sigma}$

$$\frac{G_h(\bar{\sigma})}{\bar{\sigma} G_h(\bar{\sigma}) + \bar{\alpha}(\alpha, h)} = \max \frac{G_h(\sigma)}{\sigma G_h(\sigma) + \bar{\alpha}(\alpha, h)}, \quad F(\bar{\sigma}, \bar{\alpha}) = rG_h(\bar{\sigma}).$$

А из (37) следует, что

$$\left\| u_{\delta h}^\alpha - u_0 \right\| \le rG_h(\bar{\sigma}). \tag{38}$$

Тем самым теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 следует, что $\Delta(T_{\bar{\alpha}}^h) = rG_h(\bar{\sigma})$. Таким образом, метод М.М. Лаврентьева является оптимальным и в случае приближенно заданного оператора.

Литература

1. Страхов, В.Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве / В.Н. Страхов // Диф. уравнения. – 1970. – Т. 6, № 8. – С. 1490–1495.

2. Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений / В.П. Танана. – М.: Наука, 1981. – 156 с.

Поступила в редакцию 21 марта 2011 г.

ABOUT OPTIMALITY OF THE M.M. LAVRENTIEV METHOD WHEN SOLVING EQUATIONS WITH OPERATOR ERROR

A.B. Bredikhina[1]

In the article the author analyses the optimality of Lavrentiev method for equations with approximate defined operator for optimality. The accurate error estimate for the solution of the method was obtained.

Keywords: operator equation, optimal method, accuracy appraisal.

References

1. Strakhov V.N. *Dif. uravnenija*. 1970. Vol. 6, no. 8. pp. 1490–1495. (in Russ.).

2. Tanana V.P. *Metody reshenija operatornyh uravnenij* (Methods of solution of operator equations). Moscow, Nauka, 1981. 156 p. (in Russ.).

[1] Bredikhina Anna Borisovna is Assistant, Applied Mathematics Department, South Ural State University. e-mail: bredihina@prima.susu.ac.ru