УДК 518.5:681.3

# ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ КОРОБОВОЙ ЛИНИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*В.А. Короткий*

# GRAPHICAL ANALYTICAL METHOD OF CONSTRUCTION OF SPACIAL CURVES OF THE SECOND ORDER

*V.A. Korotkiy*

**Изложен способ построения гладких криволинейных образующих, составленных из участков кривых второго порядка, позволяющий не только начертить образующую, но и получить ее алгебраическое уравнение. Для автоматизированной реализации предложенного способа разработано программное средство построения кривой второго порядка, проходящей через данные точки и касающейся данных прямых.**

*Ключевые слова: кривая второго порядка, касательная, кривизна, порядок гладкости, сплайн, составная кривая, кулачковый профиль.*

**A method for the construction of straight curved generants with-represented sections of the second-order curves which allows not only to draw a generator but to get its algebraic equation, is offered.The programtool for the constructionof curves of the second order passing through the data points and data relating to direct is developed for the automatized realization of the offered method.**

*Keywords: curve of the second order, tangent, curvature, degree of smoothness, spline, compound curve, cam cross-section.*

В практике конструкторской работы нередко приходится решать задачу построения криволинейного обвода, состоящего из дуг кривых линий и проходящего через заданные точки. Обводы, имеющие в местах стыка кривых общие касательные, называются гладкими, или коробовыми. Коробовой линией кривых второго порядка называют плавную кривую, состоящую из последовательного ряда дуг кривых второго порядка, имеющих на стыках либо общие касательные (гладкость первого порядка), либо не только общие касательные, но и общие радиусы кривизны (гладкость второго порядка). В некоторых случаях на конструируемую составную кривую может быть наложено требование гладкости третьего или даже четвертого порядка, означающее отсутствие скачка производных соответствующего порядка в стыковой точке обвода.

Плавные кривые широко применяются в архитектуре и строительстве при конструировании перекрытий, оболочек, воздуховодов, диффузоров, при проектировании автомобильных дорог и т. д. Преимущественное использование кривых второго порядка для решения задач формообразования объясняется хорошей изученностью этих кривых, простотой их построения и аналитического описания.

Тем не менее несмотря на развитие компьютерной графики, на сегодняшний день отсутствуют компьютерные программные средства построения гладких обводов из дуг кривых второго порядка. Активное развитие и внедрение вычислительной геометрии [1] привело к парадоксальной ситуации, когда на компьютере гораздо проще начертить кусочно-гладкую кривую третьего порядка (сплайн), чем составить коробовую линию из дуг кривых второго порядка.

Существенный недостаток сплайнов заключается в том, что спроектированную сплайн-кривую трудно представить в удобном аналитическом виде. Она фиксируется и передается на производство либо в графической форме, либо как дискретный набор чисел – координат точек полученной кривой.

В отличие от сплайновых кривых, дуги кривых второго порядка имеют простое аналитическое описание. Кривая второго порядка определена пятью своими элементами – точками и касательными, поэтому для вычисления коэффициентов уравнения кривой второго порядка общего вида требуется решить систему пяти линейных алгебраических уравнений. Для определения метрики кривой (центра, главных осей, асимптот) ее уравнение приводится к каноническому виду.

Эти сравнительно простые алгебраические процедуры, тем не менее, не вполне уместны при геометрическом моделировании в среде какого-либо графического пакета. Поэтому представляется актуальной и практически целесообразной разработка графического алгоритма и соответствующего программного средства для автоматизированного построения и аналитического описания кривой второго порядка, заданной своими пятью элементами.

Такое программное обеспечение должно позволять пользователю, не покидая окно графического редактора, вычерчивать кривую второго порядка по пяти ее элементам, указанным на экране монитора (по пяти точкам, по пяти касательным или по произвольному набору точек и касательных), а также определять метрику и находить значения коэффициентов канонического уравнения проектируемой кривой.

Для решения этой задачи разработан графический алгоритм, позволяющий строить кривую второго порядка и определять ее метрику по любому из пятидесяти возможных сочетаний точек и касательных, задающих искомую кривую [2, 3]. В алгоритме используются лишь два графических примитива (прямая линия и окружность) и две графические операции (поиск точки пересечения двух прямых, точек пересечения прямой и окружности), поэтому точность построения соответствует точности выполнения этих операций в применяемом конструктором графическом пакете.

На основе графического алгоритма [2, 3] составлена программа (на языке *Autolisp*) построения кривой второго порядка, заданной своими точками и касательными [4]. Рассмотрим примеры практического использования разработанного программного средства.

**Аппроксимация плавных кривых**

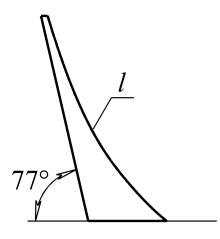
В практике архитектурного проектирования нередко возникает ситуация, когда проектировщик прочерчивает какую-либо линию «от руки», исходя из эстетической оценки создаваемой архитектурной формы. Например, кривая $l$, по которой выполнено очертание тыльной части монумента Покорителям Космоса (Москва, ВВЦ), была прорисована «от руки» архитектором (рис. 1). Для выполнения инженерных расчетов необходимо аппроксимировать эту графически заданную линию какой-либо закономерной кривой (желательно – алгебраической кривой невысокого порядка).

Найдем ее уравнение с помощью разработанного программного средства [4]. В окне графического редактора указываем на кривой $l$ кроме граничных точек *1, 5* еще три промежуточные точки *2, 3, 4* и обращаемся к программе, используя предусмотренную в ней опцию построения кривой второго порядка «по пяти точкам». Программа вычерчивает кривую второго порядка $m$, проходящую через данные точки *1…5* (в рассматриваемом примере получаем гиперболу), находит ее центр $S$, главные оси $2a$, $2b$ и асимптоты. Погрешность аппроксимации $\varepsilon = (m - l)/l$ не превысила 0,1 %, что позволяет аппроксимировать графически вычерченную кривую $l$ дугой гиперболы $m$.

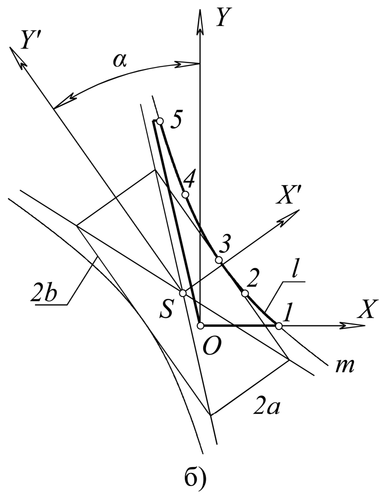
Обращаясь к справочной информации используемого графического пакета, определяем (в масштабе чертежа) размеры главных осей гиперболы $2a = 22{,}1664$ мм, $2b = 53{,}2589$ мм и в локальной системе координат $X'SY'$ составляем ее каноническое уравнение $0{,}8141x^2 - 0{,}1410y^2 = 100$. В системе координат $XOY$ определяем координаты центра $S$ гиперболы $x_S = -3{,}9382$ мм, $y_S = 7{,}4850$ мм и угол поворота $\alpha = 25°$ репера $X'SY'$ относительно $XOY$. Этих сведений достаточно, чтобы при необходимости перейти от канонического уравнения кривой в системе координат $X'SY'$ к уравнению в базовой системе координат $XOY$.

**Коробовая кривая первого порядка гладкости**

Известно, что диффузоры с криволинейной образующей по техническим и экономическим показателям лучше, чем с прямолинейной образующей [5]. Профиль диффузора рассчитывается численными методами вычислительной газодинамики. В результате расчета получают дискретный ряд точек, определяющих его криволинейную образующую, с указанными в характерных точках образующей направлениями линий тока (касательными к искомой образующей). Требуется спроектировать гладкую закономерную кривую, прохо-




а)




б)

**Рис. 1. Аппроксимация графически заданной кривой: а – исходная кривая *l*; б – аппроксимирующая кривая *m* (гипербола)**

дящую через данные точки и имеющую данные касательные.

Пусть профиль диффузора задан рядом точек *1…7* и направлением линий тока $t_1, t_5, t_7$ в характерных точках *1, 5, 7* профиля (рис. 2). Визуально анализируя заданный ряд точек, замечаем, что кривизна образующей заметно возрастает на участке *5…7* по сравнению с участком *1…5*. Поэтому разделим профиль диффузора на два участка со стыковой точкой *5*.

Первый участок *1…5* аппроксимируется кривой второго порядка, проходящей через точки *1, 3, 5* и имеющей заданные касательные: касательную $t_1$ в начальной точке *1* и касательную $t_5$ в стыковой точке *5*. Для построения этой кривой используем предусмотренную в программе [4] опцию построения кривой «по трем точкам и двум касательным». Указав на экране монитора точки *1, 3, 5* и касательные $t_1, t_5$, обращаемся к программе, которая вычисляет и вычерчивает кривую второго порядка $e_1$ (в рассматриваемом примере – сильно вытянутый эллипс), проходящую через указанные точки и имеющую указанные касательные.

Используя справочную информацию графического пакета, получаем размеры эллипса $e_1$: большая ось $2a$ = 44,6955 мм, малая ось $2b$ = 2,9882 мм, координаты центра $O'$ эллипса $e_1$ в базовой системе координат $XY$ составляют $O'$(13,5175 мм, 19,9793 мм). В соответствии с этими данными уравнение эллипса $e_1$ в системе координат $X'O'Y'$ записывается в канонической форме: $0,2024x^2 + 44,7935y^2 = 100$.

Второй участок *5…7* профиля диффузора также может быть описан кривой второго порядка, проходящей через точки *5, 6, 7* и имеющей заданные касательные: касательную $t_5$ в стыковой точке *5* и касательную $t_7$ в граничной точке *7*. Для построения этой кривой снова обращаемся к программе [4], указывая на экране монитора точки *5, 6, 7* и касательные $t_5, t_7$ . Получаем эллипс $e_2$, проходящий через данные точки и имеющий данные касательные. Используя справочную информацию графического пакета, определяем координаты центра $O''$(21,4617 мм, 35,3798 мм) эллипса $e_2$ и размеры его главных осей. Эти сведения позволяют записать каноническое уравнение эллипса $e_2$ в локальной системе координат $X''O''Y''$: $0,5067x^2 + 2,2980y^2 = 100$.

Таким образом, криволинейную образующую диффузора удалось описать коробовой кривой, составленной из дуг двух эллипсов. Полученная составная кривая имеет первый порядок гладкости, проходит через расчетные точки *1, 3, 5, 6, 7* и удовлетворяет заданным условиям касания в точках *1, 5, 7*. В точках *2, 4*, не учтенных при построении образующей, погрешность аппроксимации составила менее 0,8 %.

**Коробовая кривая второго порядка гладкости**

При проектировании прецизионных кулачковых механизмов в некоторых случаях требуется обеспечить второй порядок гладкости замкнутого профиля кулачка, то есть плавное (без «скачков» второй производной в стыковых точках) изменение кривизны профилирующей кривой, проходящей через данные точки касательно к данным прямым.

Пусть требуется построить вписанную в прямоугольник коробовую кривую второго порядка гладкости, проходящую через точки *1…8* (рис. 3).

Предварительно построим коробовую кривую первого порядка гладкости, удовлетворяющую заданным условиям инцидентности. Первый отсек кривой определен точками *1, 2, 3* с вертикальной касательной в начале и с горизонтальной касательной в конце. Обращаясь к [4], последовательно указываем точки *1, 2, 3* и касательные на концах проектируемого отсека. Программа вычерчивает эллипс $k_1$, уравнение которого нетрудно записать, обратившись к справочной информации графического пакета. Аналогичным образом, выстраивая второй отсек искомой кривой (эллипс $k_2$), получаем профиль кулачка с гладкостью первого порядка, состоящий из двух участков эллипсов, имеющих общую касательную в стыковой точке *3* (рис. 3, б).

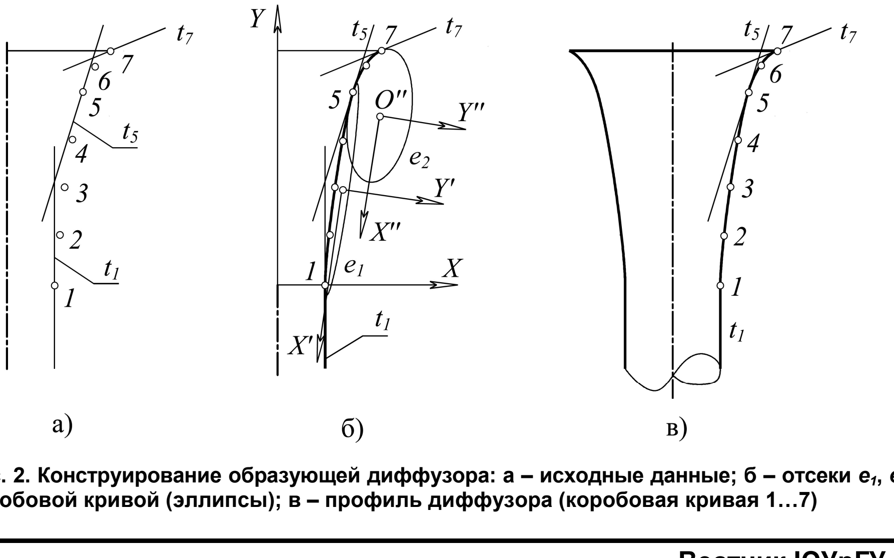



**Рис. 2. Конструирование образующей диффузора: а – исходные данные; б – отсеки $e_1$, $e_2$ коробовой кривой (эллипсы); в – профиль диффузора (коробовая кривая 1…7)**

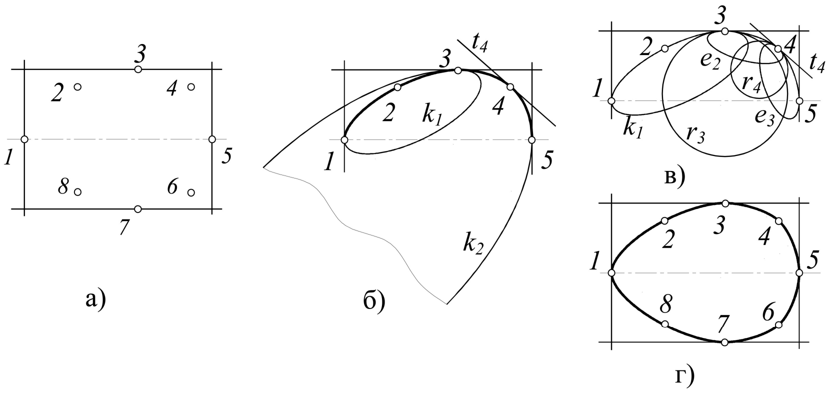



**Рис. 3. Построение симметричного профиля кулачка: а – исходные данные; б – отсеки $k_1$, $k_2$ коробовой кривой первого порядка гладкости; в – построение отсеков $k_1$, $e_2$, $e_3$ коробовой кривой второго порядка гладкости; г – расчетный профиль кулачка**

В точке *4* находим касательную $t_4$ к эллипсу $k_2$, которая потребуется при решении основной задачи – построения профиля второго порядка гладкости.

Составим коробовую кривую второго порядка гладкости. При этом первый участок профиля – отсек эллипса $k_1$, проходящий через точки *1, 2, 3* – не изменяется. Но найденный ранее эллипс $k_2$ уже непригоден для продолжения проектируемой кривой, так как в точке *3* эллипсы $k_1$ и $k_2$ имеют разную кривизну. Поэтому на последующие участки проектируемой кривой накладывается дополнительное требование равенства радиусов кривизны участков в стыковой точке.

Круг кривизны кривой второго порядка в любой ее точке определяется с помощью геометрически точного построения, рассмотренного в [6]. Найдя в точке *3* круг кривизны $r_3$ первого участка *1…3*, выстраиваем второй участок *3…4* таким образом, чтобы в своей начальной точке он имел радиус кривизны $r_3$, проходил через точку *4* и касался прямой $t_4$. Выполняя это построение с помощью программы [4], получаем эллипс $e_2$, удовлетворяющий всем указанным условиям (рис. 3, в).

Следующий участок профиля (от точки *4* до точки *5*) строится аналогично: определяем круг кривизны $r_4$ эллипса $e_2$ в стыковой точке *4*, затем обращаемся к программе [4], указывая начальную *4* и конечную *5* точки, вертикальную касательную в конце участка и круг кривизны $r_4$ в его начале. Программа вычисляет метрику и вычерчивает эллипс $e_3$ с кругом кривизны $r_4$ в точке *4* и вертикальной касательной в точке *5*.

Таким образом, получена коробовая кривая второго порядка гладкости, составленная из кусков эллипсов $k_1, e_2, e_3$, проходящая через заданные точки и вписанная в данный прямоугольник (рис. 3, г). Расчет показал, что теоретические профили коробовых кривых первого и второго порядка гладкости отличаются на 1,25 %. Тем не менее, если контур второго порядка гладкости заменить упрощенной кривой с гладкостью первого порядка, то это несущественное отличие может заметно сказаться на работоспособности всего механизма в целом.

### Динамический обвод с гладкостью третьего порядка

При проектировании скоростных участков автомагистралей, виражей санно-бобслейных трасс и некоторых других спортивных сооружений требуется обеспечить наиболее возможную гладкость трассы в плане.

В этом случае не удается использовать кривые второго порядка. Например, нельзя выполнить сопряжение второго порядка гладкости от прямолинейного к закругленному участку трассы с помощью отсека кривой второго порядка, так как у последней нет точек с нулевой кривизной (точек перегиба). В качестве переходных кривых, обеспечивающих плавное изменение кривизны, обычно используют известные, хорошо изученные алгебраические кривые более высокого порядка (клотоиды, лемнискаты Бернулли, дуги кубической параболы и др.) или кривые Безье пятой степени, способные единой кривой моделировать зигзагообразные линии и серпантины [7].

Рассмотрим условия плавного сопряжения двух кривых второго порядка с гладкостью третьего порядка в стыковой точке. Пусть первый отсек обвода задан точками *1, 2, 3* и касательными $t_1, t_3$. Второй отсек задан точкой *4* и касательной $t_4$ . В стыковой точке *3* требуется обеспечить третий порядок гладкости (рис. 4).

Через точки *1, 2, 3* проходит единственная кривая второго порядка *a*, удовлетворяющая условиям касания $t_1, t_3$. Построив эту кривую, находим ее круг кривизны *r* в точке *3* и вычерчиваем кривую *b*, заданную окружностью кривизны *r* в точке *3*, точкой *4* и указанной в ней касательной $t_4$. Полученный обвод *a*–*b* имеет второй порядок гладкости.

Накладывая на второй участок обвода дополнительное требование гладкости третьего порядка в стыковой точке *3*, получаем избыточный набор условий, которым невозможно удовлетворить с помощью отсека кривой второго порядка. Действительно, все конические сечения, проходящие через четыре бесконечно близкие точки (заданные в нашем случае кривой *a* и ее точкой *3*), образуют

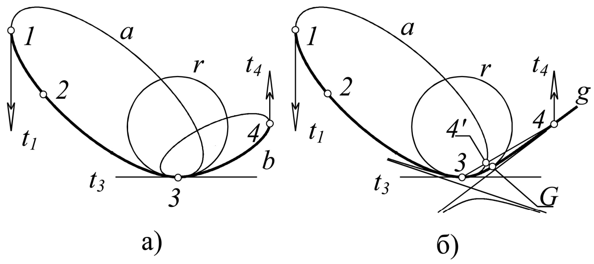



**Рис. 4. Построение динамического обвода: а – обвод второго порядка гладкости; б – обвод третьего порядка гладкости; в – сравнение обводов**

множество $\infty^1$ (пучок) кривых второго порядка. Иначе говоря, через любую точку плоскости проходит только одна коника, имеющая четырехточечное соприкосновение (то есть соприкосновение третьего порядка гладкости) с данной кривой *a* в ее точке *3*. Поэтому на искомый второй участок *g* обвода, кроме требования гладкости третьего порядка в начальной точке *3*, можно наложить еще только одно условие – либо инцидентность точке *4*, либо касание прямой $t_4$.

Сохранив условие инцидентности, но отказавшись от выполнения условия касания, получаем гомологическое соответствие коник *a* и *g*, заданное осью $t_3$, центром *3* и парой соответственных точек *4–4′* (рис. 4, б). Точка *4′* найдена по теореме Паскаля на пересечении кривой *a* с проецирующим лучом *3–4*. В составленной гомологии определяем несколько точек (достаточно пяти) второго участка обвода *g* и строим его с помощью программы [4]. Получаем гиперболу *g*, которая в точке *G* пересекается с окружностью кривизны *r*, общей для обоих участков *a* и *g* конструируемого обвода.

Рассмотрим соприкосновение коник *a, b, g* (рис. 4, в). Кривые *a* и *g* соприкасаются в точке *3* «наиболее тесно», образуя обвод с непрерывным изменением третьей производной (третьего порядка гладкости). При этом в точке *4* не удалось выполнить условие касания с прямой $t_4$. Кривые *a* и *b* стыкуются в точке *3* с гладкостью второго порядка (третья производная терпит разрыв в точке стыка *3*), зато обвод касается данной прямой $t_4$.

Таким образом, из кривых второго порядка возможно составить обвод с гладкостью третьего порядка, но каждый отсек такого обвода определяется всего одним параметром. Как правило, одного варьируемого параметра недостаточно для управления формой конструируемой кривой. Поэтому обычно из дуг кривых второго порядка составляют коробовые обводы с гладкостью не выше второго порядка.

**Выводы**

Составлен графический алгоритм и *lisp*-программа построения кривой второго порядка, заданной произвольным набором пяти элементов (точек и касательных). Программа позволяет в диалоговом режиме конструировать коробовые кривые первого или второго порядка гладкости, составленные из участков кривых второго порядка в соответствии с заданными условиями инцидентности (прохождению через данные точки касательно к данным прямым), а также получать алгебраические уравнения этих участков в локальной или базисной системе координат, не покидая окно графического редактора.

***Литература***


*1. Фокс, А. Вычислительная геометрия / А. Фокс, М. Пратт. – М.: Мир, 1982. – 304 с.*

*2. Короткий, В.А. Проективное построение коники, заданной пятью действительными элементами / В.А. Короткий. – деп. в ВИНИТИ 19.01.2010, № 13-В2010. – 44 с.*

*3. Короткий, В.А. Проективное построение коники: учеб. пособие / В.А. Короткий. – Челябинск: ЮУрГУ, 2010. – 98 с. – www.lib.susu.ac.ru*

*4. Программа для ЭВМ «Построение кривой второго порядка, проходящей через данные точки и касающейся данных прямых» / В.А. Короткий; правообладатель ГОУ ВПО «ЮУрГУ», свидетельство о государственной регистрации № 2011611961 от 04.03.2011.*

*5. Субботин, Е.В. Диффузоры дымовых труб в виде оболочки вращения с криволинейной образующей / Е.В. Субботин, В.М. Асташкин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2010. – Вып. 11. – № 33(209). – С. 8–12.*

*6. Короткий, В.А. Соприкосновение коник / В.А. Короткий // Совершенствование подготовки учащихся и студентов в области графики, конструирования и стандартизации: межвуз. науч.-метод. сб. – Саратов: СГТУ, 2011. – С. 78–82.*

*7. Бойков, В.Н. Автоматизированное проектирование автомобильных дорог / В.Н. Бойков, Г.А. Федотов, В.И. Пуркин. – М.: МАДИ, 2005. – 224 с.*


***Поступила в редакцию 10 сентября 2010 г.***