

Научно-методический раздел

УДК 681.327.11

3D-МОДЕЛЬ «ЧЕРНОГО ЯЩИКА» В ЗАДАЧЕ СОВМЕЩЕНИЯ КОНИКИ С КВАДРИКОЙ

А.Л. Хейфец

3D-MODEL OF “BLACK BOX” IN THE PROBLEM OF COMBINATION CONIC WITH A QUADRIC

A. L. Kheyfets

Приведено решение задачи совмещения заданных эллипса и однополостного эллиптического гиперboloида. На этом примере показан метод 3D-компьютерного геометрического моделирования, заключающийся в построении множества иско- мых объектов, его исследовании и выборе из него объекта с требуемыми парамет- рами.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, геометрическое моделирование, 3D-технологии, AutoCAD.

A solution of the problem of combining the given ellipse and sheeted elliptic hyperbo- loid is given. This example demonstrates 3D-computer geometric modeling with the help of which we can construct a set of required objects, its study and the choice of a facility with the required parameters.

Keywords: computer simulation, geometric simulation, 3D-technologies, AutoCAD

Как правило при решении и исследовании за- дач геометрического моделирования стремятся получить геометрическую, часто 3D-реалистич- ную, или аналитическую модель. Однако для большинства прикладных инженерных задач ха- рактерна высокая сложность таких моделей, при- водающая к множеству упрощений и допущений, либо невозможность или нецелесообразность их построения.

В экспериментальных исследованиях и зада- чих управления в таких случаях применяют моде- ли «черного ящика», позволяющие исследовать объекты, внутреннее устройство которых неиз- вестно.

Цель работы – на примере задачи о совме- щении коники с квадрикой показать 3D-метод компьютерного геометрического моделирования, не требующий построения явной геометрической или аналитической модели (модель «черного ящика»), а также рассмотреть решение указанной задачи.

Известны частные случаи задачи совмещения [1, 2 и др.] эллипса и конуса и их явные решения. Автор усложнил задачу, рассмотрев совмещение произвольной коники с произвольной квадрикой [3], а также ввел точку на поверхности квадрики, через которую должна проходить коника. В данной ра- боте приведено решение для эллипса и однопол- остного эллиптического гиперboloида (ОГ).

Задача: даны эллипс и ОГ с наперед задан- ными параметрами. На поверхности ОГ задана точка. Определить положение эллипса, при кото- ром он является сечением ОГ и проходит через заданную на нем точку («надеть» эллипс на ОГ).

Методика решения. Работа выполнялась в пакете AutoCAD, как наиболее адаптированном к теоретическим задачам геометрического модели- рования [4].

Модель ОГ строим по характерным размерам (рис. 1), создав каркас из двух очерковых гипербол и 10...20 «поперечных» эллипсов и применив к нему команду *Lofit* [5]. Гиперболы для каркаса по- лучим как сечения эллиптического конуса [3].

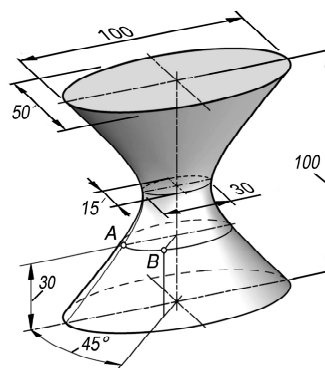


Рис. 1. Модель и параметры гиперboloида

Эллипс зададим двумя метриками $d1$ и d^* , где $d1$ – длина большой оси, $d^* = d2/d1$ – относительная длина малой оси $d2$ (рис. 2, а). В процессе решения задачи эллипсы получались как сечения ОГ – сплайны. Для определения их метрик по методу хорд находим центр, затем с помощью дуги окружности, проведенной из центра и обрезанной контуром сплайна, находим ось и вершины, следовательно, $d1$ и $d2$.

Для повышения точности решения ОГ строили как линейчатую поверхность по трем направляющим. Добавив еще две направляющие, эллипс и его метрики находили по пяти точкам пересечения секущей плоскости с отрезками каркаса [5].

Все построения и вычисления выполнялись программными средствами AutoLISP [6]. Алгоритмы программной реализации, зачастую оригинальные, в данной работе не приводятся.

Частный случай задачи. Как правило в сложных моделях для их предварительной оценки первоначально выполняют упрощенные частные решения, которые получаются явными и геометрически точными. Для этого в рассматриваемой задаче рассмотрим совмещение заданных эллипса и ОГ без дополнительного ограничения в виде точки.

Эллипс ищем «просто» как фронтально-проецирующий, то есть перпендикулярный фронтальной плоскости симметрии ОГ. Пример на рис. 2 приведен для $d1 = 90$; $d^* = 0.4$. Впишем в ОГ сжатый эллипсоид, образованный вращением эллипса e_f подобного заданному эллипсу e (рис. 2, б). Касание в двух точках приводит к распадению линии пересечения на два эллипса e' и e'' , подобных заданному. Построение можно выполнить на проекционном чертеже (рис. 2, в), где (2–3) – проекция эллипса e' ; $d1'$ – длина большой оси эллипса e' или e_f ; (4–5) – произвольная хорда, параллельная (2–3); 6 – ее средняя точка; отрезки (11–9) и (12–8) параллельны (i –6) и проведены через точки 7, 10, e^* и e^{**} – найденные эллипсы, то есть решение задачи для ее частного случая.

По симметрии получим еще два фронтально-проецирующих эллипса e^* , e^{**} (рис. 2, з). Так же находим еще четыре профильно-проецирующих эллипса. Всего частный случай имеет восемь решений. В зависимости от параметров модели количество решений снижается до четырех или может отсутствовать.

Решение в частном случае задачи можно получить по 3D, если найти направление плоскости эллипсов e' или e'' , поместить в нее искомый эллипс e и «лофтировать» его по фронтально-очерковой гиперболе h (рис. 2, д). Пересечение полученного объекта с ОГ дает искомые эллипсы (рис. 2, е).

Общее решение задачи. Были рассмотрены две точки: точка A , расположенная во фронтальной плоскости симметрии, и точка B общего положения (см. рис. 1). В каждом из вариантов не удалось получить явного геометрического или аналитического решения.

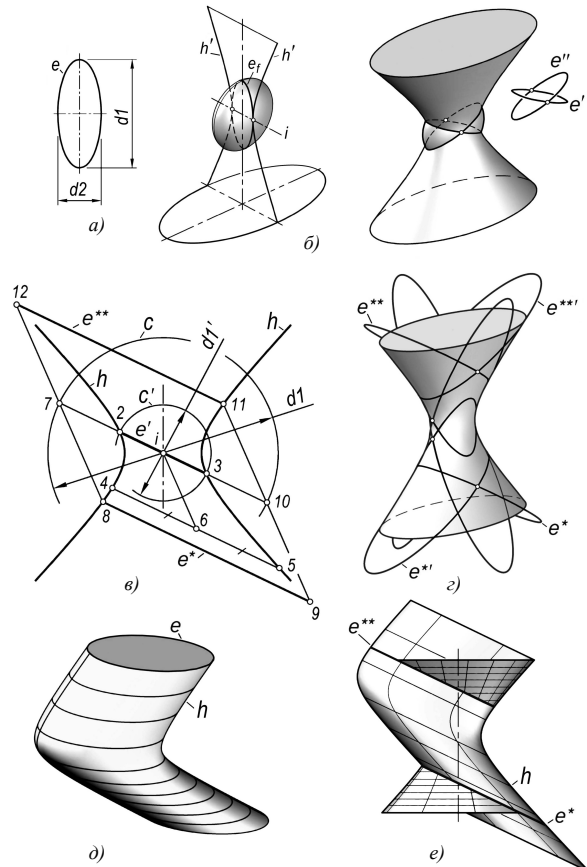


Рис. 2. Частный случай задачи: а – совмещаемый эллипс; б – сжатый эллипсоид при двойном соприкосновении с гиперboloидом; в – решение на проекционном чертеже; г – восемь решений для частного случая; д – вспомогательный объект; е – решение по 3D

Для решения по методу «черного ящика» построим множество возможных эллипсов, расположенных на поверхности ОГ и проходящих через заданную на нем точку. Из этого множества найдем эллипсы с требуемыми метриками.

Для создания множества

1) введем секущую плоскость ψ (рис. 3), совершающую вращение вокруг двух осей, проходящих через заданную точку. Первое вращение вокруг оси $i1$, параллельной оси i ОГ. Второе – вокруг горизонтали $i2$, принадлежащей плоскости ψ и вращающейся вместе с ней вокруг $i1$. Положение плоскости ψ зададим углом u между $i2$ и большой осью эллипса основания ОГ, а также углом w между плоскостью ψ и плоскостью основания ОГ;

2) интервалы изменения u , w задаем такими, чтобы получить все множество коник. Для т. A , находящейся в плоскости симметрии, изменение u задаем в интервале $(-90^\circ, 0)$. Для точки B интервал изменения u $(-90^\circ, 90^\circ)$;

3) шаг вращений принимаем $0.5...1^\circ$. В этом случае размеры множеств составляют $20...40$ тысяч. Они успешно обрабатываются на персональном компьютере;

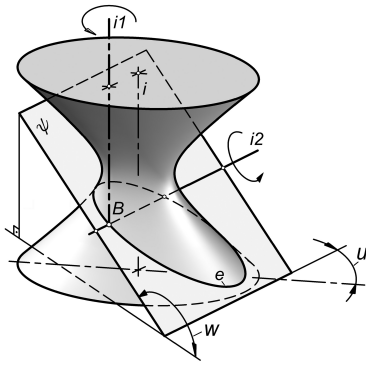


Рис. 3. Схема формирования множества коник для точки B

4) для каждого сечения определяется тип коники, выбираются только эллипсы, находятся их метрики $d1$, d^* и точки осей. Эти параметры, а также u, v -координаты секущей плоскости заносятся в базу данных (БД). Формирование БД происходит за 2...3 часа;

5) далее по метрикам искомого эллипса в БД находим эллипс с близкими параметрами, извлекаем его uv -координаты и по ним строим сечение ОГ. Отклонение метрик построенного эллипса от заданных значений рассматриваем как погрешность решения;

6) выделяя из БД подмножества с заданными характеристиками, строим различные зависимости, то есть исследуем модель. Все операции, а также построение графиков выполняются средствами AutoLisp.

Решение для точки A. Отобразим БД, полученную для точки A и составляющую $\approx 38\ 000$ эллипсов, в координатах $d1$, d^* (рис. 4, а). Каждый эллипс отмечаем маркером точки. Получена область возможных решений.

Для исследования области определяем углы наклона эллипсов к плоскостям симметрии ОГ. Получаем зависимости, показывающие положение особых эллипсов. Так, кривые a – фронтально-

проецирующие эллипсы, для них $u = \pm 90^\circ$; кривые b – профильно-проецирующие, $u = 0^\circ$; m – равнонаклоненные к плоскостям симметрии, $u = \pm 45^\circ$,

Рассмотрим особые точки (см. рис. 4, а). Точка C – два круговых сечения гиперboloида, проходящих через т. A. Точка D – фронтально-проецирующий эллипс с минимально-возможной длиной большой оси. Точка E – горизонтальный эллипс. Все особые эллипсы можно построить геометрически точно. Так для точки C достаточно построить круговые сечения ОГ на основе двойного сопряжения со сферой и через точку A вывести секущие плоскости, параллельные выявленным окружностям. Для точки D следует опустить перпендикуляр из точки A на противоположную ветку фронтально-очерковой гиперболы – это большая ось фронтально-проецирующего эллипса. Для точки E – построить горизонтальное сечение ОГ.

Исследуем количество возможных решений. Сделаем выборку (вертикальный «срез» области) мость угловых координат секущей плоскости от d^* (рис. 4, б). Получены две пары кривых. Первая пара $u1(d^*)$, $w1(d^*)$, вторая – $u2(d^*)$, $w2(d^*)$. Каждая пара задает перемещение секущей плоскости, при котором образуются эллипсы с изменяемой длиной малой оси d^* и постоянным значением большой оси $d1 = 75$.

Видим, что при $d^* < d^*_{min}$ решение отсутствует. В интервале $d^*_{min} < d^* < d^*_1$ имеется одно решение, определяемое парой $u1$, $w1$. В интервале $d^*_1 < d^* < d^*_{max}$ добавляется решение от пары $u2$, $w2$, то есть имеется два решения. При $d^* > d^*_{max}$ решение вновь отсутствует.

Количество решений указано для изменения u в интервале $(-90^\circ, 0)$. Полное количество решений вдвое больше. То есть область, ограниченная кривыми a (см. рис. 4, а), соответствует двум решениям. Ее граничные точки 1, 3 – два совпадающих фронтально-проецирующих эллипса каждая, для них угол $u = \pm 90^\circ$ (см. рис. 4, б). Вне этой области возникает четыре решения.

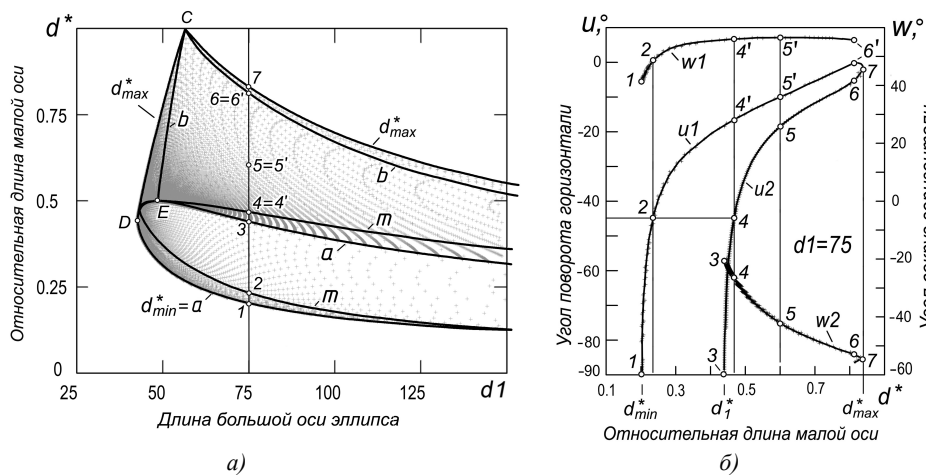


Рис. 4. Исследование множества эллипсов, проходящих через точку A: а – область множества; б – угловые координаты секущей плоскости для $d1 = 75$

Эллипсы в точках 2 и 4 являются равнонаклоненными (принадлежат кривой m , угол $u = \pm 45^\circ$). В точке 6' два симметричных профильно-проецирующих эллипса (принадлежат кривой b , $u = 0$). В точках 4', 6, 7 – по два эллипса общего положения, причем в точке 7 эллипсы совпадающие.

В качестве примера построены эллипсы для точек 5, 5' (рис. 5), соответствующих $d1 = 75$, $d^* = 0.6$. Получено четыре эллипса общего положения. Эллипсы $e1, e2$ построены как сечения ОГ по координатам u, w секущей плоскости (см. рис. 4, б, точки 5, 5'). Тот же результат получается при отыскании этих эллипсов непосредственно из БД по параметрам $d1, d^*$. Еще два эллипса построены по симметрии: эллипс $e1'$ симметричен $e1$ относительно фронтальной плоскости симметрии ОГ, эллипс $e2'$ симметричен $e2$.

Погрешность решения (см. таблицу на рис. 5) определяли как $del = 0.5 (del1 + del2)$, где $del1, del2$ – погрешности по метрикам $d1, d^*$.

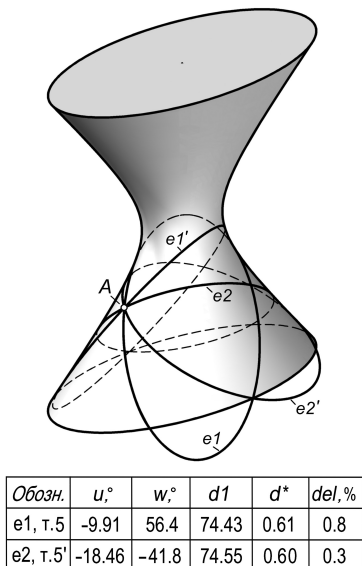


Рис. 5. Эллипсы через точку А для $d1 = 75$ и $d^* = 0.6$

Решение для точки В. Область возможных решений (рис. 6) имеет значительно более сложный вид чем в примере с точкой А. Это отражает и более высокую сложность задачи, хотя с позиции рассматриваемого метода решения это не имеет значения: нужно построить множество эллипсов и делать по нему выборки.

В точках C', C возникают два различных круговых сечения ($\varnothing 35.5$ и $\varnothing 84.6$). В точке E образуется горизонтальный эллипс. Кривая a – фронтально-проецирующие эллипсы, кривые b, b', b'' – профильно-проецирующие эллипсы.

Рассмотрим срез области для эллипсов с длиной большой оси $d1 = 75$ (см. рис. 6). Количество решений определяется (рис. 7, а) количеством точек пересечения вертикальной линии с кривыми $u1, u2$. Видим, что в интервалах $d_{min} < d^* < d^*_1$ и $d^*_2 < d^* < d^*_{max}$ существуют два решения. При $d^*_1 < d^* < d^*_2$ – от трех до пяти решений. При $d^* < d^*_{min}$ и $d^* > d^*_{max}$ решение отсутствует.

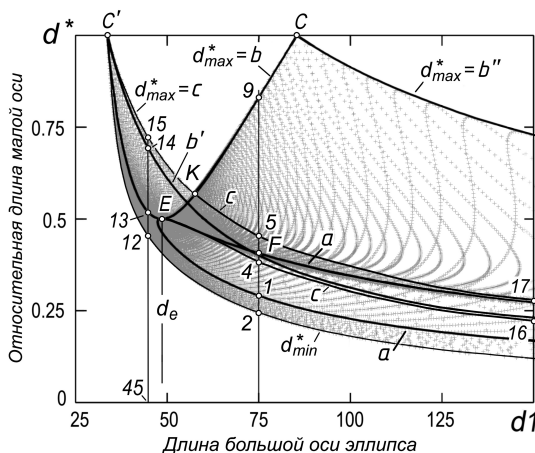


Рис. 6. Область множества эллипсов, проходящих через точку В

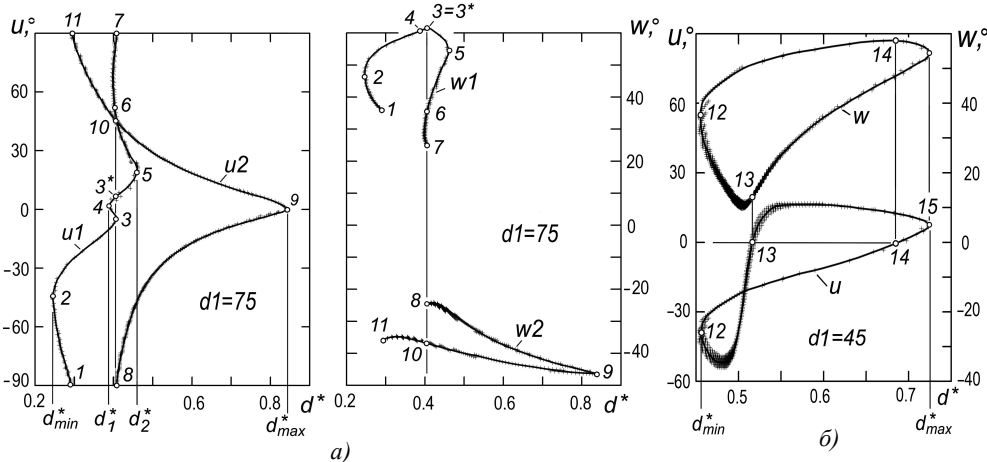
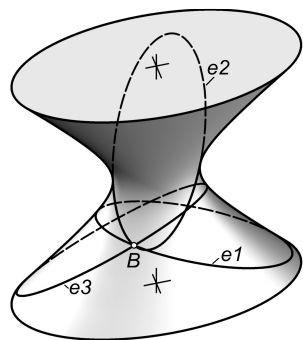


Рис. 7. Срез области определения для точки В: а – $d1 = 75$; б – $d1 = 45$



Эллипс	Точка	$u,^\circ$	$w,^\circ$	$d1$	d^*	$del, \%$
e1	8	-90	-25	75.4	0.43	2.6
e2	3	-3	62	75.8	0.4	1.8
-	3*	4	62	76.5	0.39	3.5
e3	10	45	-37	75.5	0.41	0.3
-	6	47	36	75.6	0.4	1.6

Рис. 8. Эллипсы через точку B для $d1 = 75$ и $d^* = 0.41$ и оценка их погрешности

Построение множества подобных срезов для различных значений $d1$ позволило выделить область (см. рис. 6), ограниченную кривыми c (16–4– $E-K-5-17$), в которой количество решений более двух. Эта область существует для $d1 > d_e$ (в нашем примере $d_e \approx 48.51$).

При $d1 < d_e$ существуют по два решения в каждой точке области определения: вертикальная линия (рис. 7, б) пересекает кривую u в двух точках.

Например, в точке F при $d1 = 75$, $d^* = 41$ (см. рис. 6) выявлено пять эллипсов, их u, v -координаты определены точками 8, 3, 3*, 10, 6 (см. рис. 7, а). Три из пяти эллипсов приведены на рис. 8. Эллипс $e1$ – фронтально-проецирующий ($u = -90^\circ$, см. табл. на

рис. 8); $e2$ – близок к профильно-проецирующему; $e3$ – равнонаклоненный к плоскостям симметрии ОГ ($u = 45^\circ$).

Технологический пример. Рассмотрим квадратики как тонкостенные оболочки, которые следует сварить. Из технологических соображений сварной шов должен быть плоской кривой – эллипсом. Известно решение задачи в частном случае [1 и др.] для конуса и цилиндра. Наша методика позволяет «сварить» любые две квадратики, имеющие как сечение конику одного типа.

Пусть необходимо сварить эллиптический цилиндр, нормальное сечение которого задано как эллипс e^* (рис. 9), и ОГ с заданными размерами. Оси цилиндра и ОГ параллельны. Сварной шов должен проходить через точку B на поверхности гиперboloида.

Решение заключается в извлечении из БД тех эллипсов, проекции которых на плоскости оснований цилиндра и ОГ имеют параметры эллипса e^* (см. рис. 9).

Например, если для эллипса e^* заданы метрики $d1 = 65$, $d^* = 0.45$, возникают три решения. Для двух из них построены модели подготовки оболочек под сварку (см. рис. 9).

О нахождении в БД эллипса с заданными метриками. База данных формируется как список на языке AutoLisp. Поиск ведется средствами обработки списков. Вводится допуск поиска del (см. выше). Первоначально, задав $del = 5...7\%$, находим множество из 30...100 эллипсов. Сортируем эти эллипсы по возрастанию угла u и их плоскости и выделяем группы с близкими значениями u . Количество групп – это количество возможных решений. В каждой группе находим эллипс с минимальным значением del , которая является одним из решений. Чтобы «не потерять» решения, в слож-

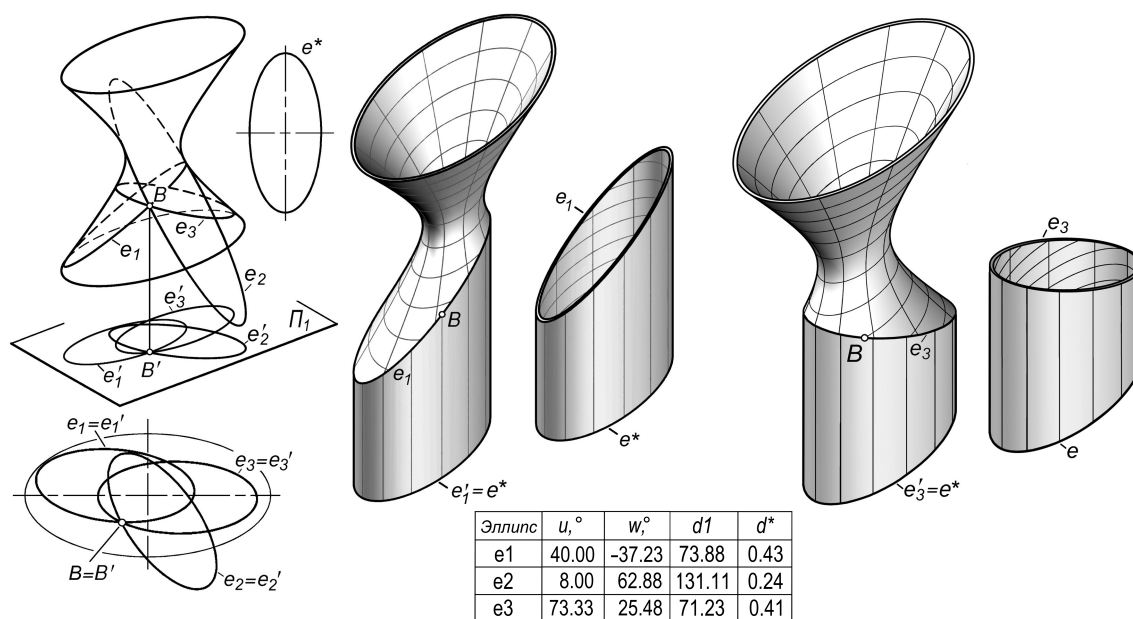


Рис. 9. Технологический пример: стыковка эллиптического цилиндра и гиперboloида

ных случаях строим зависимости (см. рис. 4, б и 7) и строим эллипсы по их uv -координатам.

Повышение точности решения до любого необходимого значения достигается созданием БД более высокой плотности или применением интерполяции.

Несмотря на то, что приведенные зависимости получены для фиксированных параметров ОГ и точек A, B , они являются характерными для рассмотренной задачи.

Другие варианты задачи совмещения коник и квадратик приведены в [3, 7].

Приведенное решение выполнено на персональном компьютере с параметрами, необходимыми для эффективной работы в пакете AutoCAD 2010. Затраты на формирование БД составляли 2...4 часа. Для работы с более сложными моделями возможны оптимизации программ и переход на более производительные, чем AutoLisp, языки программирования.

Выводы

1. Сложный характер полученных в данной работе зависимостей позволяет с большой уверенностью утверждать, что геометрическая или аналитическая модели рассмотренной задачи вряд ли могут быть построены.

2. Предложенный метод позволил найти решение и исследовать задачу с требуемой точностью.

3. Рассмотренный метод в сочетании с 3D-алгоритмами и программированием может быть рекомендован для практических задач геометрического моделирования, в которых построение аналитических и геометрических моделей затруднительно или неоправданно ввиду их сложности.

Литература

1. Пеклич, В.А. Мнимая начертательная геометрия: учеб. пособие / В.А. Пеклич – М.: Изд-во АСВ, 2007 – 104 с.

2. Пеклич, В.А. Задачи по начертательной геометрии: учеб. пособие / В.А. Пеклич, С.Н. Павленко. – М.: Высш. шк., 1999. – 139 с.

3. Хейфец, А.Л. Компьютерные 3d алгоритмы в курсе геометрического моделирования (на примере задачи совмещения коник с квадратиками) / А.Л. Хейфец // Труды 18-й международной научно-технической конф. «Информационные средства и технологии. Москва 19–21 октября 2010». – М.: Издательский дом МЭИ, 2010. – Т. 3. – С. 110–117.

4. Инженерная 3D-компьютерная графика. AutoCAD: учеб. пособие / А.Л. Хейфец, А.Н. Логиновский, И.В. Буторина, В.Н. Васильева; под ред. А.Л. Хейфеца. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Изд-во Юрайт, 2011. – 464 с.

5. Хейфец, А.Л., Новые возможности 3D-моделирования линейчатых поверхностей в AutoCAD / А.Л., Хейфец, А.Н. Логиновский // Состояние, проблемы и тенденции развития графической подготовки в высшей школе: сб. тр. Всерос. совещания зав. кафедрами графических дисциплин. – Челябинск. – Изд-во ЮУрГУ, 2007. – Т. 2. – С. 125–133.

6. Хейфец, А.Л. Инженерная компьютерная графика AutoCAD. Опыт преподавания и широта взгляда / А.Л. Хейфец. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2002. – 432 с.

7. Хейфец, А.Л. Инженерный 3d-метод компьютерного геометрического моделирования на примере задачи совмещения коники с квадратикой / А.Л. Хейфец // Труды 19-й международной научно-технической конференции «Информационные средства и технологии. Москва 18–20 октября 2011». – М.: Издательский дом МЭИ, 2011. – С. 78–86.

Поступила в редакцию 12 сентября 2010 г.