Теория расчета строительных конструкций

УДК 624.04:539.3:534

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТРЕЖНЯХ ФЕРМЫ В ПРОЦЕССЕ КОЛЕБАНИЙ

Е.М. Уфимцев

ESTIMATION OF THE EFFORTS IN TRUSSES IN THE PROCESS OF VIBRATIONS

E.M. Ufimtsev

Построен алгоритм решения задачи перехода от узловых перемещений фермы в процессе колебаний к усилиям и напряжениям в её элементах. Дано приложение алгоритма к задаче колебаний плоской фермы при выключении (обрушении) раскоса.

Ключевые слова: ферма, вынужденные колебания, узловые перемещения, усилия в элементах, обрушение, метод временного анализа.

The algorithm of solving the problem of transition from truss nodal displacements in the process of vibrations to efforts and stresses in truss elements is derived. Application of algorithm to the task of flat truss vibrations by avalanche (disconnection) of the diagonal rod is given.

Keywords: truss, forced vibrations, nodal displacements, efforts in the elements, disconnection, time analysis method.

Предлагается алгоритм динамического расчета статически неопределимой плоской стальной фермы в процессе её колебаний, вызванных нестационарной нагрузкой. При этом рассматриваются колебаний неповрежденной и поврежденной конструкции.

Алгоритм решения задачи реализуется с помощью метода временного анализа конструкций (МВА), основанного на непосредственном решении обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) движения дискретной диссипативной системы[1]:

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = P(t), \qquad (1)$$

где $M = \mathrm{diag}(m_1, \ldots, m_n)$, $C = C^{\mathrm{T}} = (c_{ij})$, $K = (r_{ij}) \in M_n(R)$ – матрицы масс, демпфирования и жесткости; $Y(t)$, $P(t) \in M_{n,1}(R)$ – векторы перемещений и внешних воздействий.

В результате интегрирования ОДУ (1) определяются кинематические параметры реакции: перемещения, скорости и ускорения (соответственно векторы $Y(t)$, $\dot{Y}(t)$, $\ddot{Y}(t)$).На их основе можно получить силовые параметры реакции – инерционные I, диссипативные F и восстанавливающие R силы:

$$I(t) = -M\ddot{Y}(t),\ F(t) = C\dot{Y}(t),\ R(t) = KY(t). \qquad (2)$$

Эти кинематические и силовые параметры реакции будут возникать в дискретных точках – в узлах конструкции, связанных со степенями свободы. В этих же узлах собраны массы m_i.

На практике возникает необходимость знать не только параметры реакции, но и усилия, и напряжения, возникающие в элементах конструкции, поэтому необходимо перейти от перемещений узлов к усилиям.

Рассмотрим вначале алгоритм решения задачи на примере неповрежденной плоской стальной фермы (рис. 1).

Для удобства расчетов выразим все размеры фермы через длину панели l: $h = 0{,}75l$, длина раскоса $l_1 = 1{,}25l$; жесткости элементов – через жесткость стоек EA: жесткость поясов $EA_1 = k_1 \cdot EA$, жесткость раскосов $EA_2 = k_2 \cdot EA$.

Более подробно параметры фермы описаны в работе [3].

В соответствии с расчетной схемой степень статической неопределимости фермы $q = 7$. Для решения задачи воспользуемся методом сил, основная (ОС) и эквивалентная (ЭС) системы для которого изображены на рис. 2.

Каноническое уравнение метода сил в матричной форме имеет вид $L \cdot X + \Delta_p = 0$, где L – матрица податливости, связанная с матрицей жесткости K соотношением $L = K^{-1}$; Δ_p – вектор свободных членов. Соответственно вектор усилий в лишних связях X из этого уравнения равен:

$$X = -L^{-1} \cdot \Delta_p = -K \cdot \Delta_p. \qquad (3)$$

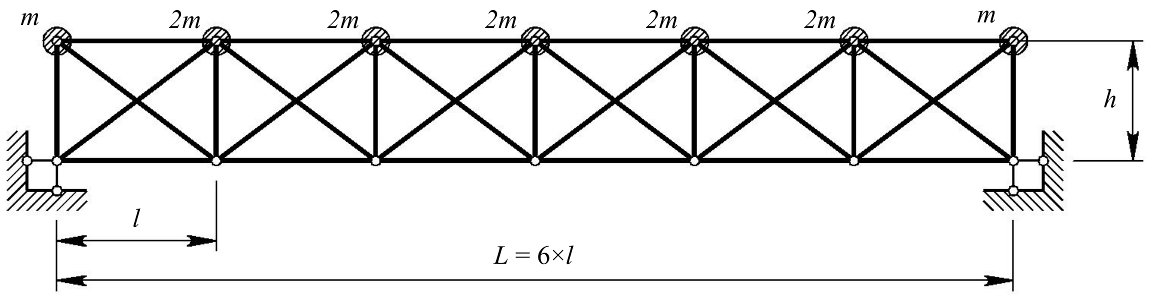

Рис. 1. Расчетная схема плоской стальной фермы

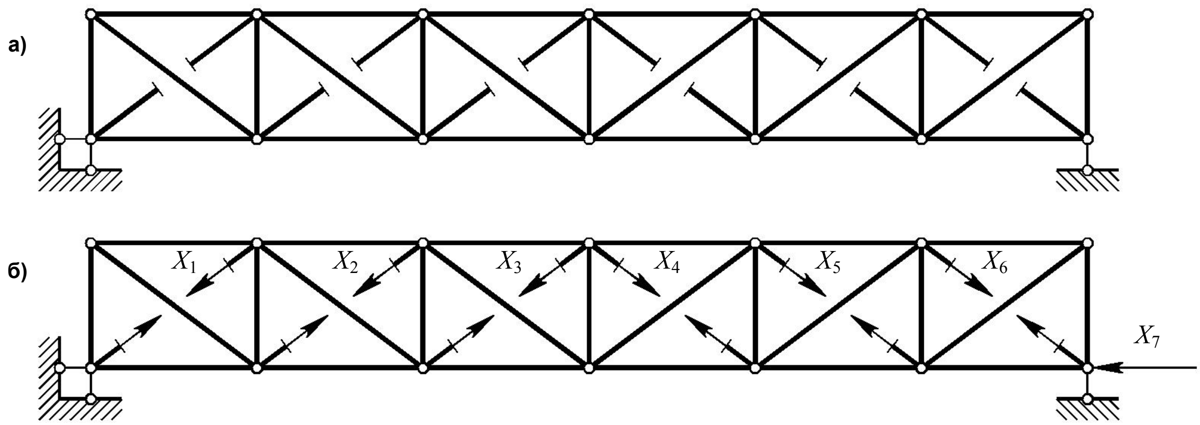

Рис. 2. Основная (а) и эквивалентная (б) системы метода сил

Для получения матрицы $L=(\delta_{ij})$ $(i, j=1,...,q)$ необходимо построить единичные эпюры продольных сил $\overline{N}_i$ в ОС от действия сил $X_i=1$ (рис. 3) и определить перемещения δ_{ij}.

В силу регулярной структуры решетки в расчетной схеме единичные эпюры $\overline{N}_i$ от неизвестных $X_i=1$ $(i=1,...,6)$ имеют однотипный характер и локализуются внутри i-й панели (рис. 3, а). Эпюра $\overline{N}_i$ от неизвестного $X_7=1$ показана на рис. 3, б.

Для определения перемещений δ_{ij} воспользуемся формулой Максвелла $\delta_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s=31}\dfrac{\overline{N}_{ik}\cdot\overline{N}_{jk}\cdot l_k}{(EA)_k}$, где s – количество стержней фермы. Тогда получим:

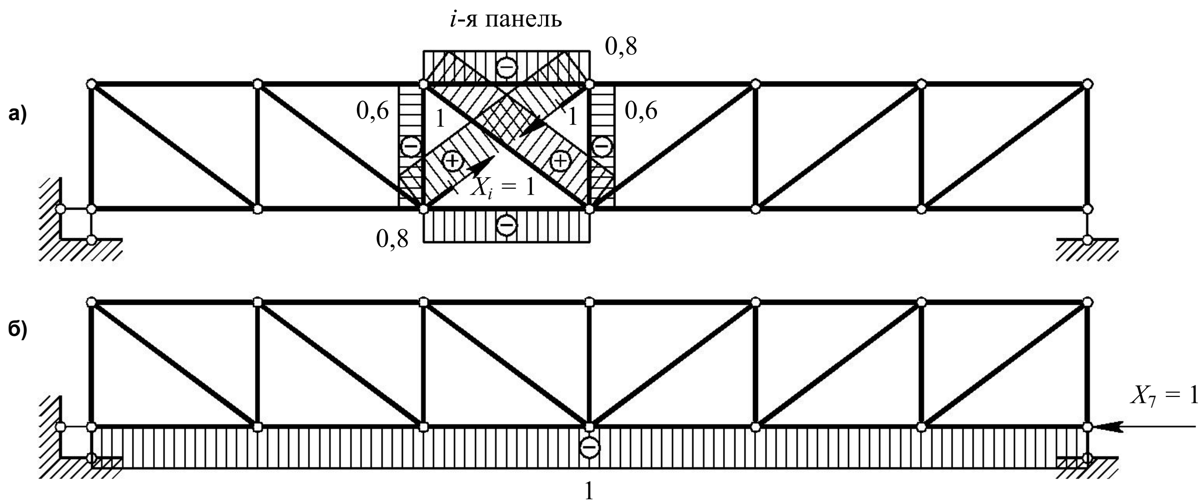

Рис. 3. Эпюры единичных продольных сил в ОС:
а – от усилий $X_i=1$ $(i=1,...,6)$; б – от усилия $X_7=1$

$$\delta_{ii} = \alpha \frac{l}{EA} \quad (i = 1, ..., 6),$$

$$\delta_{i,i+1} = \delta_{i+1,i} = \beta \frac{l}{EA} \quad (i = 1, ..., 5),$$

$$\delta_{i7} = \delta_{7i} = \gamma \frac{l}{EA} \quad (i = 1, ..., 6), \ \delta_{77} = \eta \frac{l}{EA},$$

$$\alpha = 0,54 + \frac{1,28}{k_1} + \frac{2,5}{k_2}, \ \beta = 0,27,$$

$$\gamma = 0,8/k_1, \ \eta = 1/k_1.$$

Структура матрицы L размерностью $q \times q$ в этом случае имеет вид:

$$L = (\delta_{ij}) = \frac{l}{EA} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \gamma \\ \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \eta \end{bmatrix}. \quad (4)$$

При матричной формулировке задачи будем иметь

$$L = \bar{N}^T \cdot B \cdot \bar{N}, \quad (5)$$

где $\bar{N}(s \times q)$ – массив, в столбцах которого содержатся единичные продольные усилия в стержнях ОС, полученные при действии сил $X_i = 1$ $(i = 1, ..., q)$; $B(s \times s)$ – диагональная матрица не связанных между собой элементов фермы. Диагональные элементы матрицы $B - \frac{l_i}{(EA)_i}$ $(i = 1, ..., s)$.

По аналогии с формулой (5) вычислим вектор Δ_p:

$$\Delta_p = \bar{N}^T \cdot B \cdot N_p, \quad (6)$$

где $N_p(s \times 1)$ – вектор усилий в стержнях ОС от действия внешнего воздействия,

$$N_p = \begin{bmatrix} N_{1p} & N_{2p} & ... & N_{31p} \end{bmatrix}^T.$$

В общем случае вынужденных колебаний фермы в узлах, содержащих массы m_i, действуют восстанавливающие, инерционные, диссипативные и внешние силы (согласно уравнению (1)). Для получения вектора N_p необходимо выполнить расчет фермы на действие восстанавливающих сил, которые можно представить в виде $R(t) = P(t) - I(t) - F(t)$ (для случая свободных колебаний силы R запишутся в виде $R(t) = -I(t) - F(t)$). Учитывая, что число динамических степеней свободы n = 14, расчетная схема фермы для этого случая будет иметь вид, представленный на рис. 4.

Векторы усилий N_p и сил $R(n \times 1)$ образуют систему линейных алгебраических уравнений:

$$N_p = A \cdot R, \quad (7)$$

где $A = (a_{ij})$ $(i = 1, ..., s; \ j = 1, ..., n)$ – матрица переходных коэффициентов.

Далее для определения усилий в лишних связях воспользуемся формулой (3), подставив в ее правую часть выражения (6) и (7):

$$X = -L^{-1} \cdot \Delta_p = -K \cdot \bar{N}^T \cdot B \cdot A \cdot R = C \cdot R, \quad (8)$$

где $C = -K \cdot \bar{N}^T \cdot B \cdot A$ – матрица коэффициентов размерностью $q \times n$.

Окончательные продольные усилия в стержнях N_{OK} согласно принципу суперпозиции будут определяться по формуле $N_{OK} = \bar{N} \cdot X + N_p$. Подставив (7) и (8) в это выражение, получим:

$$N_{OK} = -\bar{N} \cdot C \cdot R + A \cdot R =$$
$$= (-\bar{N} \cdot C + A) \cdot R = U \cdot R, \quad (9)$$

где $U = -\bar{N} \cdot C + A$ – матрица коэффициентов размерностью $s \times n$.

В выражении (9) матрица U не зависит от времени и связана только с геометрическими и физическими параметрами конструкции. Вектор R, напротив, является функцией времени $R = R(t)$, поэтому в процессе колебаний будем получать вектор усилий в элементах фермы, также являющийся функцией от времени $N_{OK}(t)$.

Рассмотрим теперь случай обрушения конструкции, когда происходит выключение одного из раскосов фермы, например, раскоса в пятой панели (рис. 5). В этом случае число стержней s уменьшится на единицу, в результате степень статической неопределимости q будет равна 6.

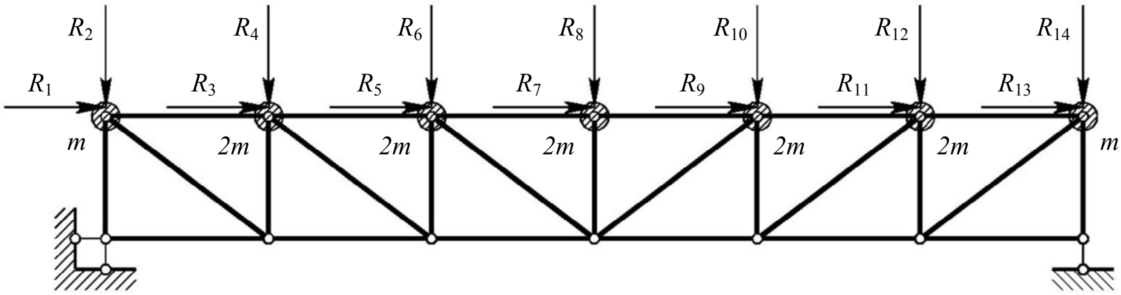

Рис. 4. Расчетная схема фермы с восстанавливающими силами

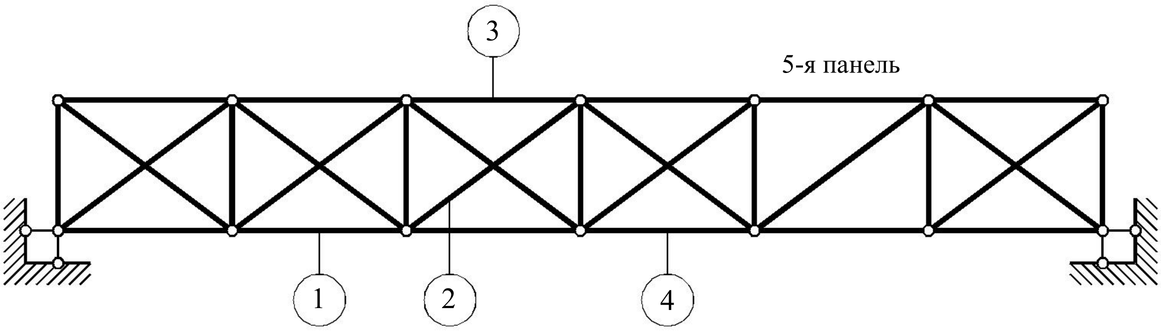

Рис. 5. Расчетная схема фермы после обрушения раскоса

Расчетные формулы для фермы с удаленным раскосом строятся аналогично предыдущим с учетом того, что размерности q и s основных массивов уменьшатся на единицу путем удаления строки и столбца, соответствующих номеру выключенного элемента (раскоса) фермы. В частности, матрица податливости фермы будет получена из (4) путем удаления 5-й строки и 5-го столбца. Удаление этих строки и столбца обусловлено тем, что в расчетной схеме выключенный раскос совпадает с 5-й лишней связью (см. рис. 2, б).

В статье [2] показана работа поврежденной фермы с расчетной схемой на рис. 5. При помощи МВА были получены осциллограммы узловых перемещений фермы y_k (рис. 6, а). Описанный алгоритм позволил определить усилия N_k в стержнях фермы в процессе колебаний. Осциллограммы усилий в отмеченных на рис. 5 элементах, показаны на рис. 6, б.

Выводы

Построен алгоритм решения задачи перехода от узловых перемещений статически нагруженной

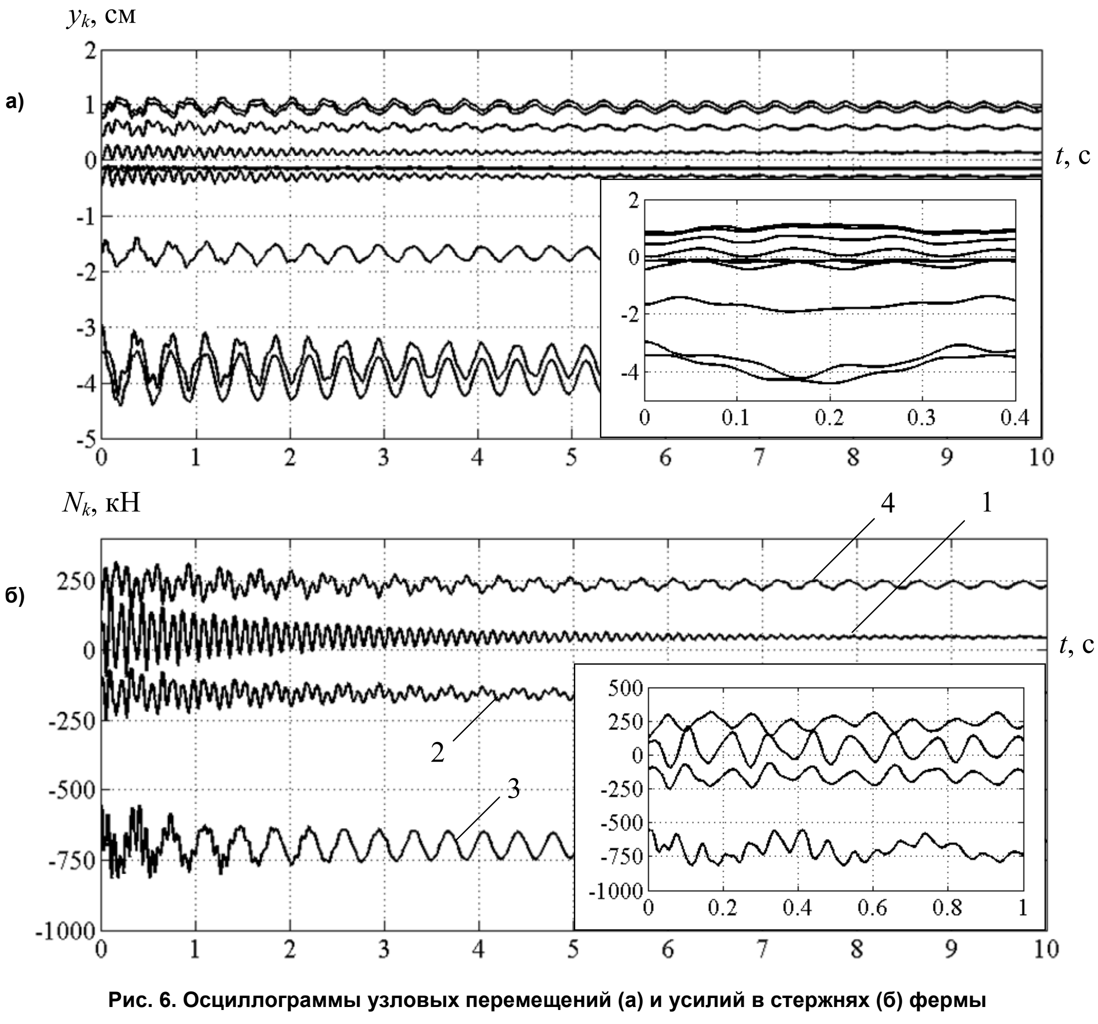

Рис. 6. Осциллограммы узловых перемещений (а) и усилий в стержнях (б) фермы

фермы к усилиям и напряжениям в её элементах. Данный алгоритм можно реализовать в задаче колебаний фермы при выключении (обрушении) отдельных несущих элементов.

В качестве достоинства алгоритма стоит отметить его простоту, а также легкость реализации в вычислительных комплексах, таких как MATLAB.

Литература

1. Потапов, А.Н. Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях: моногр. / А.Н. Потапов. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 167 с.

2. Потапов, А.Н. Колебания систем с обрушающимися связями / А.Н. Потапов, Е.М. Уфимцев // Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы. – М.: МГСУ, 2011. – С. 292–301.

3. Бондарев, Ю.В. Расчет стержневых систем при внезапном удалении отдельных связей / Ю.В. Бондарев, Нгуиен Тханх Суан // Строительная механика и расчет сооружений. – 2010. – № 4. – С. 43–48.

Поступила в редакцию 8 сентября 2011 г.