УДК 517.9

НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА – ЛЯВА

А.А. Замышляева

THE INITIAL-FINISH VALUE PROBLEM FOR NONHOMOGENIOUS BOUSSINESQUE – LÖVE EQUATION

A.A. Zamyshlyaeva

Рассматривается начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява. Проводится редукция к абстрактной начально-конечной задаче для уравнения соболевского типа второго порядка. Получены достаточные условия для однозначной разрешимости исходной и абстрактной задач.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, M,N-функции, начально-конечная задача.

We investigate the initial-finish value problem for the Boussinesque–Löve equation by reducing it to the initial-finish value problem for the Sobolev type equation of the second order. We obtain sufficient conditions about the unique solvability of original and abstract problems.

Keywords: the Sobolev type equations, the M,N-functions, the initial-finish value problem.

Введение

Рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява [1]

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')u_t + \beta(\Delta - \lambda'')u + f, \tag{1}$$

описывающее продольные колебания упругого стержня с учетом поперечной инерции и при внешней нагрузке, где параметры $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0, \beta > 0$ характеризуют среду, причем отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу.

Задачу Дирихле для уравнения (1) удается в подходящих банаховых пространствах редуцировать к абстрактному уравнению соболевского типа [2]

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0 v + f. \tag{2}$$

Нашей целью является изучение начально-конечной задачи для такого уравнения. Термин «начально-конечная задача» появился относительно недавно, и отражает тот факт, что при постановке такой задачи для уравнения (1) часть данных задается в начале временнóго промежутка [0,T], а другая часть – в конце. Первоначально такая задача называлась «задачей сопряжения» и рассматривалась как обобщение задачи с данными на свободной поверхности. Именно в этом контексте была построена теория таких задач для линейных уравнений соболевского типа первого порядка и разработаны приложения этой теории [3],[4]. Мы распространим эти идеи и методы на случай уравнений соболевского типа второго порядка.

В статье кроме Введения и Списка литературы содержится три параграфа. В п.1 приведены основные результаты теории операторных вырожденных M,N-функций [5]. В п.2, следуя [3], изучается абстрактная начально-конечная задача. П.3 посвящен постановке и исследованию начально-конечной задачи для уравнения (1).

1. Вырожденные M,N-функции и задача Шоуолтера – Сидорова

Пусть $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{G}$ – банаховы пространства, операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{G})$. Обозначим через $\vec{B}$ пучок операторов B_1 и B_0.

Определение 1. *Множества* $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G};\mathfrak{V})\}$ *и* $\sigma^A(\vec{B}) = \mathbb{C}\backslash\rho^A(\vec{B})$ *будем называть A-резольвентным множеством и A-спектром пучка* $\vec{B}$.

Заметим, что множество $\rho^A(\vec{B})$ всегда открыто, поэтому A-спектр $\sigma^A(\vec{B})$ пучка $\vec{B}$ всегда замкнут.

Определение 2. *Оператор-функцию* $R^A_\mu(\vec{B}) = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ *с областью определения* $\rho^A(\vec{B})$ *будем называть A-резольвентой пучка* $\vec{B}$.

A-резольвента пучка $\vec{B}$ всегда аналитична в своей области определения.

Определение 3. *Пучок операторов $\vec{B}$ называется полиномиально ограниченным относительно оператора A (или просто полиномиально A-ограниченным), если*

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ (|\mu| > a) \Rightarrow (R^A_\mu(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{G};\mathfrak{V})).$$

Если существует оператор $A_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G};\mathfrak{V})$, то пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен. Если $\ker A \bigcap(\bigcap\limits_{k=0}^{1} \ker B_k) \neq \{0\}$, то пучок $\vec{B}$ не будет полиномиально A-ограниченным.

Зафиксируем $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ – контур, ограничивающий круг, содержащий $\sigma^A(\vec{B})$. Введем и обсудим одно важное в дальнейшем условие. Если пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, то можно потребовать, что

$$\int\limits_\gamma R^A_M(\vec{B})d\mu = \mathbb{O}. \qquad (A)$$

Это условие, впервые введенное в [5], оказалось ключевым при рассмотрении уравнений соболевского типа высокого порядка. Заметим, что если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G};\mathfrak{V})$ или оператор $B_1 = \mathbb{O}$ (уравнение неполное), то условие (A) выполняется; а если оператор $A = \mathbb{O}$ и существует оператор $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G};\mathfrak{V})$, то нет.

Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено (A). Тогда имеют смысл следующие операторы как интегралы от аналитических оператор-функций:

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu R^A_\mu(\vec{B})Ad\mu, \ Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu A R^A_\mu(\vec{B})d\mu.$$

Лемма 1. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено условие (A).Тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{G})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{G})$ — проекторы.*

Положим $\mathfrak{V}^0 = \ker P$, $\mathfrak{G}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{V}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{G}^1 = \operatorname{im} Q$. Из леммы следует, что $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1, \mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 \oplus \mathfrak{G}^1$. Через A^k (B_l^k) обозначим сужение оператора A (B_l) на $\mathfrak{V}^k$, $k, l = 0, 1$.

Теорема 1. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено условие (A).Тогда действия операторов расщепляются:*
(i) $A^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^k; \mathfrak{G}^k),\ k = 0, 1$;
(ii) $B_l^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^k; \mathfrak{G}^k),\ k, l = 0, 1$;
(iii) существует оператор $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^1; \mathfrak{V}^1)$;
(iv) существует оператор $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^0; \mathfrak{V}^0)$.

Теперь рассмотрим уравнение соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0 v. \tag{3}$$

Вектор-функцию $v \in C^2(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$ назовем *решением* уравнения (3), если оно обращает его в тождество. Решение $v = v(t)$ уравнения (3) называется *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если

$$P(\dot{v}(0) - v_1) = 0,\ P(v(0) - v_0) = 0, \tag{4}$$

.

Определение 4. *Оператор-функцию $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{G}))$ будем называть пропагатором уравнения (3), если для любого $v \in \mathfrak{V}$ вектор-функция $v(t) = V^t v$ будет решением этого уравнения.*

Рассмотрим семейства операторов

$$V_1^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\mu^A(\vec{B}) A e^{\mu t} d\mu, t \in \mathbb{R},$$

$$V_0^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\mu^A(\vec{B})(\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu, t \in \mathbb{R}.$$

Как показано в [5], оба эти семейства являются пропагаторами уравнения (3). Причем если контур $\gamma \subset \rho^A(\vec{B})$ и ограничивает область Γ, такую, что $\sigma^A(B) \cap \bar{\Gamma} = \emptyset$, то в силу теоремы Коши $V_1^t = V_0^t = \mathbb{O}$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и утверждение очевидно.

Определение 5. *Семейства $M^\bullet, N^\bullet : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathfrak{V})$ называются семейством вырожденных M, N-функций уравнения (3), если*
(i) $M^\bullet$ и $N^\bullet$ — пропагаторы уравнения (3);
(ii) $\dot{M}^0 = N^0 = \mathbb{O}; M^0 = \dot{N}^0 = P$.

Теорема 2. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, выполнено условие (A). Тогда существует единственное семейство вырожденных M, N-функций уравнения (3), причем $M^t = V_0^t,\ N^t = V_1^t$.*

Определение 6. Определим семейство операторов $\{K_q^1, K_q^2\}$ следующим образом:
$K_0^1 = \mathbb{O},\ K_0^2 = \mathbb{I}$
$K_1^1 = H_0,\ K_1^2 = -H_1$
$K_q^1 = K_{q-1}^2 H_0,\ K_q^2 = K_{q-1}^1 - K_{q-1}^2 H_1, q = 1, 2, ...$

Определение 7. Точка ∞ называется

(i) *устранимой особой точкой* A-резольвенты пучка $\overrightarrow{B}$, если $K_1^1 = K_1^2 \equiv \mathbb{O}$;

(ii) *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\overrightarrow{B}$, если $K_p^s \neq \mathbb{O}$, при некотором s, но $K_{p+1}^s \equiv \mathbb{O}$, при любом $s = 1, 2$;

(iii) *существенно особой точкой* A-резольвенты пучка $\overrightarrow{B}$, если $K_p^2 \not\equiv \mathbb{O}$ при любом $p \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. В дальнейшем, если пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, выполнено условие (A) и ∞ является полюсом порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его A-резольвенты, будем говорить, что пучок $\vec{B}$ (A, p)-ограничен.

Теорема 3. *Пусть пучок $\vec{B}$ (A, p)-ограничен. Тогда при любых $v_k \in \mathfrak{V}, k = 0, 1$, существует единственное решение задачи (3), (4), представимое в виде: $v(t) = M^t P v_1 + N^t P v_0$.*

2. Абстрактная начально-конечная задача

Пусть $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{G}$ – банаховы пространства, операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{G})$. Рассмотрим уравнение соболевского типа

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0 v + f. \tag{5}$$

Если пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено условие (A), то, как следует из теоремы 2, существует единственное семейство вырожденных M, N-функций однородного уравнения (5). Пусть выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned}&A\text{-спектр пучка } \vec{B}\ \sigma^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}) \bigcup \sigma_1^A(\vec{B}),\ \text{причем}\\ &\sigma_k^A(\vec{B}) \neq \emptyset,\ k = 0, 1;\ \text{и существует контур } \gamma_0 \subset \mathbb{C},\\ &\text{ограничивающий область } \Gamma_0 \subset \mathbb{C} \text{ такую, что}\\ &\Gamma_0 \bigcap \sigma_0^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}),\ \overline{\Gamma}_0 \bigcap \sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset.\end{aligned} \tag{B}$$

Тогда существует оператор

$$P_{in} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \mu R_\mu^A(\vec{B}) A d\mu \in \mathfrak{L}(\mathfrak{V}).$$

Потребуем выполнение еще одного условия

$$\int_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B}) d\mu = \mathbb{O}. \tag{A_0}$$

Аналогично лемме 1 можно получить следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнены условия $(A), (B), (A_0)$. Тогда P_{in} – проектор, причем $P_{in}P = PP_{in} = P_{in}$.*

Построим оператор $P_{ex} = P - P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$. В силу леммы 2 оператор P_{ex} – проектор, причем $P_{in}P_{ex} = P_{ex}P_{in} = \mathbb{O}$. Возьмем произвольные векторы $v_0^0,\ v_1^0,\ v_0^T,\ v_1^T \in \mathfrak{V}$. Решение $v = v(t)$ уравнения (5) назовем *решением начально-конечной задачи* для уравнения (5), если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered}P_{ex}(\dot{v}(0) - v_1^0) = 0,\ P_{ex}(v(0) - v_0^0) = 0;\\ P_{in}(\dot{v}(T) - v_1^T) = 0,\ P_{in}(v(T) - v_0^T) = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Заметим, что если $\sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset$, то $P_{ex} = \mathbb{O}$ и $P_{in} = P$. Тогда задача (6) для уравнения (5) превращается в задачу (4), (5).

Введем в рассмотрение следующие семейства операторов:

$$N_{in}^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B}) A e^{\mu t} d\mu, t \in \mathbb{R},$$

$$M_{in}^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B})(\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu, t \in \mathbb{R}.$$

Оба семейства хоть и не являются семейством вырожденных M, N-функций в смысле определения 5 (так как не удовлетворяют условию (ii)), но тем не менее обладают рядом полезных свойств.

Лемма 3. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнены условия $(B), (A_0)$. Тогда*

(i) $M_{in}^\bullet$ и $N_{in}^\bullet$ – пропагаторы уравнения (5);

(ii)$N_{in}^0 = \dot{M}_{in}^0 = \mathbb{O}, \dot{N}_{in}^0 = M_{in}^0 = P_{in}$.

Далее, построим семейства операторов $M_{ex}^t = M^t - M_{in}^t,\ N_{ex}^t = N^t - N_{in}^t$.

Лемма 4. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнены условия $(A), (B), (A_0)$. Тогда*

(i)$M_{ex}^\bullet$ и $N_{ex}^\bullet$ – пропагаторы уравнения (5);

(ii)$N_{ex}^0 = \dot{M}_{ex}^0 = \mathbb{O}, \dot{N}_{ex}^0 = M_{ex}^0 = P_{ex}$.

Теорема 4. *Пусть пучок $\vec{B}$ (A, p)-ограничен, и выполнены условия $(B), (A_0)$. Тогда для любых $T \in \mathbb{R}, v_k^0, v_k^T \in \mathfrak{V},\ k = 0, 1$, вектор-функции $f = f(t),\ t \in [0, T]$, такой, что $f^0 = (I - Q)f \in C^{p+1}([0, T]; \mathfrak{F}^0) \cap C^{p+2}((0, T]; \mathfrak{F}^0),\ f^{in} = Q_{in} f \in C([0, T]; \mathfrak{F}^{in}),\ f^{ex} = Q_{ex} f \in C([0, T]; \mathfrak{F}^{ex})$ существует единственное решение $v = v(t)$ задачи (5), (6), которое к тому же имеет следующий вид:*

$$v(t) = -\sum_{q=0}^{p} K_q^2 (B_0^0)^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f^0(t) + M_{in}^{t-T} v_0^T + M_{ex}^t v_0^0 + N_{in}^{t-T} v_1^T + N_{ex}^t v_1^0 +$$

$$+ \int_0^t R_{ex}^{t-s} f^{ex}(s) ds - \int_t^T R_{in}^{t-s} f^{in}(s) ds, \tag{7}$$

где $R_{in}^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B}) e^{\mu t} d\mu,\ R^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_\mu^A(\vec{B}) A e^{\mu t} d\mu,\ R_{ex}^t = R^t - R_{in}^t$.

Заметим, что если $T = 0$, то задача (6) превращается в задачу (4).

3. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Введем в рассмотрение пространства $\mathfrak{V} = \left\{v \in W_2^2(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\right\}$ и $\mathfrak{G} = L_2(\Omega)$. Простанство $\mathfrak{V}$ — банахово с нормой

$$\|v\|_{\mathfrak{V}}^2 = \int\limits_\Omega (\sum_{k,l=1}^{n} v_{x_k x_l}^2 + \sum_{k=1}^{n} v_{x_k}^2 + v^2) dx,$$

а пространство $\mathfrak{G}$ — гильбертово со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Формулой

$$\langle Lv, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_\Omega v_{x_k x_k} w dx, v, w \in \mathfrak{V},$$

зададим оператор $L : \mathfrak{V} \to \mathfrak{G}$. Справедлива

Теорема 5. *[6] Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{G})$, его спектр $\sigma(L)$ вещественен, отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке $-\infty$.*

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений оператора L, занумерованных по невозрастанию с учетом кратности, а через φ_k – множество соответствующих собственных функций, ортонормированных в смысле $\mathfrak{G}$. Положим $A = \lambda - L, B_1 = \alpha(L - \lambda'), B_0 = \beta(L - \lambda'')$. Имеет место

Теорема 6. *[5] Пусть выполнено одно из следующих условий:*
(i) $\lambda \notin \{\lambda_k\}$;
(ii) $(\lambda \in \{\lambda_k\} \wedge (\lambda \neq \lambda')$;
(iii) $(\lambda \in \{\lambda_k\}) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$.
Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен.

Доказательство заключается в изучении A-спектра пучка $\vec{B}$. Во всех случаях A-спектр пучка $\vec{B}$ составляют решения уравнений

$$(\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k) = 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим A-спектр пучка $\vec{B}$ в зависимости от ситуации.

(i) $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{\mu_k^{1,2} = \dfrac{\alpha(\lambda_k - \lambda') \pm \sqrt{\alpha^2(\lambda' - \lambda_k)^2 - 4\beta(\lambda - \lambda_k)(\lambda'' - \lambda_k)}}{2(\lambda - \lambda_k)} : k \in \mathbb{N}\right\}$.

(ii) $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{\mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N}\setminus\{l : \lambda = \lambda_l\}\right\} \bigcup \left\{\mu_l = \dfrac{\beta(\lambda_l - \lambda'')}{\alpha(\lambda' - \lambda_l)} : \lambda = \lambda_l\right\}$.

(iii) $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{\mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N}\setminus\{l : \lambda = \lambda_l\}\right\}$.

Замечание 2. Как нетрудно показать, в случае $(\lambda \in \{\lambda_k\}) \wedge (\lambda = \lambda' = \lambda'')$ пучок $\vec{B}$ не будет полиномиально A-ограниченным.

Следствие 1. *[5] Пусть выполнено условие либо (i), либо (iii) теоремы 6. Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ имеет место условие (A), причем ∞ – устранимая особая точка A-резольвенты пучка $\vec{B}$.*

Замечание 3. В случае (ii) теоремы 6

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{k=1}^{\infty}((\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k))^{-1}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k d\mu =$$

$$\sum_{\lambda_k = \lambda}\frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\alpha(\lambda' - \lambda_k)} \neq \mathbb{O},$$

и поэтому условие (A) не выполняется.

Итак, в силу теоремы 6 и следствия 1 в случаях (i), (iii) пучок $\vec{B}$ $(A,0)$-ограничен. Поэтому построим семейства вырожденных M, N-функций уравнения (2):

$$M^t = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

$$N^t = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \left(\frac{\mu_k^1(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)}e^{\mu_k^1 t} + \right.$$

$$+\frac{\mu_k^2(\lambda-\lambda_k)+\alpha(\lambda'-\lambda_k)}{(\lambda-\lambda_k)(\mu_k^2-\mu_k^1)}e^{\mu_k^2 t}\Big)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие членов с номерами k такими, что $\lambda=\lambda_k$. Кроме M,N-функций для постановки начально-конечной задачи необходимы проекторы P и P_{in}. Построим проектор P:

$$P=\begin{cases}\mathbb{I}, \text{ если выполнено (i);}\\ \mathbb{I}-\sum\limits_{\lambda=\lambda_k}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k, \text{ если выполнено (iii).}\end{cases}$$

Для построения проектора P_{in} выберем область $\Gamma_0\subset\mathbb{C}$, содержащую конечное множество точек A-спектра $\sigma_0^A(\vec{B})$ и такую, что $\partial\Gamma_0\bigcap\sigma_0^A(\vec{B})=\emptyset$. Как нетрудно видеть, область Γ_0 можно выбрать такой, что $\partial\Gamma_0=\gamma_0$ – контур. По рецептам п.3 построим проектор

$$P_0=\sum_{\lambda_k^i}\left\langle\cdot,\varphi_k^i\right\rangle\varphi_k^i.$$

Здесь $\left\{\lambda_k^i\right\}=\sigma^A(\vec{B})\bigcap\overline{\Gamma}_0,\ \lambda_k^i=\lambda_k$, где k такое, что $\lambda_k\neq\lambda$.

Теперь у нас все готово для постановки и изучения начально-конечной задачи для уравнения (2). В цилиндре $\Omega\times(0,T)$, $T\in\mathbb{R}_+$ рассмотрим уравнение

$$(\lambda-\Delta)v_{tt}=\alpha(\Delta-\lambda')v_t+\beta(\Delta-\lambda'')v+f(t), \tag{8}$$

выберем произвольно векторы $v_k^0,\ v_k^T\in\mathfrak{V}, k=0,1$. Решение $v=v(t)$ уравнения (8) назовем *решением начально-конечной задачи*, если

$$\begin{aligned}P_{ex}(\dot{v}(0)-v_1^0)=0,\ P_{ex}(v(0)-v_0^0)=0;\\ P_{in}(\dot{v}(T)-v_1^T)=0,\ P_{in}(v(T)-v_0^T)=0.\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $P_{ex}=P-P_{in}$.

По рецептам п.2 построим вырожденные M_{in},N_{in}-функции. Для этого введем в рассмотрение множество индексов $\mathfrak{K}$ элементов множества $\left\{\lambda_k^i\right\}$. Тогда

$$M_{in}^t=\sum_{k\in\mathfrak{K}}\frac{e^{\mu_k^1 t}-e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1-\mu_k^2}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

$$N_{in}^t=\sum_{k\in\mathfrak{K}}\Big(\frac{\mu_k^1(\lambda-\lambda_k)+\alpha(\lambda'-\lambda_k)}{(\lambda-\lambda_k)(\mu_k^1-\mu_k^2)}e^{\mu_k^1 t}+$$

$$+\frac{\mu_k^2(\lambda-\lambda_k)+\alpha(\lambda'-\lambda_k)}{(\lambda-\lambda_k)(\mu_k^1-\mu_k^2)}e^{\mu_k^2 t}\Big)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k.$$

Теперь в силу теоремы 4 и следствия 1 имеет место

Теорема 7. *При любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\lambda\in\mathbb{R}$ таком, что выполнено условие либо (i), либо (iii) теоремы 6, и любых $T\in\mathbb{R}_+,v_k^0,\ v_k^T\in\mathfrak{V},k=0,1$, существует единственное решение задачи (8),(9), которое к тому же имеет вид (7).*

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и поддержку в работе.

Литература

1. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977.
2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
3. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22–28.
4. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2011. – №17 (234), вып. 8. – С. 113–114.
5. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислит. технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С.45 – 54.

References

1. Uizem J. *Lineynye i nelineynye volny* [Linear and nonlinear waves]. Moscow, Mir, 1977.
2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo: VSP, 2003.
3. Zagrebina S.A. On Showalter – Sidorov problem [O zadache Shouoltera – Sidorova] *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2007, no. 3, pp. 22 – 28.
4. Manakova N.A., Dylkov A.G.Optimal control of solutions of initial-finish problem for the linear Sobolev type equations [Optimal'noe upravlenie resheniyami nachal'no-konechnoy zadachi dlya lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa] *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie»*, 2011, no. 17 (234), vyp. 8, pp. 113 – 114.
5. Zamyshlyaeva A.A. The phase spaces of a class of linear sobolev type equations of the second order [Fazovye prostranstva odnogo klassa lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa]. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2003, vol. 8, no. 4, pp.45 – 54.

Алена Александровна Замышляева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (Россия, г. Челябинск), alzama@mail.ru.

Alyona Aleksandrovna Zamyshlyaeva, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor, Department «Equations of Mathematical Physics», South Ural State University (Russia, Chelyabinsk), alzama@mail.ru.

Поступила в редакцию 30 августа 2011 г.