

УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ
НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков

OPTIMAL CONTROL OF SOLUTIONS OF INITIAL-FINISH
PROBLEM FOR THE LINEAR SOBOLEV TYPE EQUATIONS

N.A. Manakova, A.G. Dylkov

В работе исследовано оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейного уравнения соболевского типа с (L, p) -секториальным оператором.

Ключевые слова: оптимальное управление, начально-конечная задача, уравнения соболевского типа.

An optimal control of solutions of an initial-finish problem for the linear Sobolev type equations with (L, p) -sectorial operator are investigated in this work.

Keywords: optimal control, initial-finish problem, Sobolev type equations.

Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и \mathfrak{U} – гильбертовы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $M \in Cl(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, а оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$, функции $u : [0, \tau) \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{U}$, $y : [0, \tau) \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{Y}$ ($\tau < \infty$) подлежат дальнейшему определению. Введем в рассмотрение L -резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\}$ и L -спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M (см. [1, гл. 4]). Пусть вдобавок оператор M (L, p) -секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (см. [1, гл. 5]), тогда существуют вырожденные аналитические полугруппы операторов $X^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu$ и $Y^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu$, где $t \in \mathbb{R}_+$, а контур $\Gamma \subset S_{\alpha, \Theta}^L(M)$ такой, что $|\arg \mu| \rightarrow \Theta$ при $\mu \rightarrow \infty$, $\mu \in \Gamma$, $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Положим $\mathfrak{X}^0(\mathfrak{Y}^0) = \ker X^{\bullet}(\ker Y^{\bullet})$, $\mathfrak{X}^1(\mathfrak{Y}^1) = \text{im } X^{\bullet}(\text{im } Y^{\bullet})$ и обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{X}^k(\mathfrak{X}^k \cap \text{dom } M)$, $k = 0, 1$. В дальнейшем нам потребуются два условия:

$$\mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1 = \mathfrak{X} \quad (\mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1 = \mathfrak{Y}), \tag{A1}$$

$$\text{существует оператор } L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1). \tag{A2}$$

Пусть L -спектр оператора M представим в виде

$$\sigma^L(M) = \sigma_{fin}^L(M) \cup \sigma_{in}^L(M), \tag{A3}$$

где $\sigma_{fin}^L(M)$ содержится в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с кусочно гладкой границей γ , причем $\gamma \cap \sigma^L(M) = \emptyset$.

Построим относительно спектральные проекторы [2] $P_{fin} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu$, $P_{in} = P - P_{fin}$. Итак, пусть выполнены условия (A1)–(A3). Для уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y + Bu \tag{1}$$

рассмотрим начально-конечную задачу

$$P_{in}(x(0) - x_0) = 0, P_{fin}(x(\tau) - x_\tau) = 0, \quad (2)$$

где $\tau \in \mathbb{R}_+$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$.

Определение 1. Вектор-функцию $x \in H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X})\}$ назовем *сильным решением уравнения (1)*, если она п. в. на $(0, \tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (1) назовем *сильным решением начально-конечной задачи*, если $P_{fin}(x(0) - x_0) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \tau^-} P_{in}(x(t) - x_\tau) = 0$.

Построим пространство $H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{v \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}) : v^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$.

Теорема 1. Пусть оператор M (L, p) -секториален, и выполнены условия (A1)–(A3). Тогда для любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи (2) для уравнения (1).

Пространство управлений $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ гильбертово, в силу гильбертовости \mathfrak{U} . Выделим в пространстве $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $H_\theta^{p+1}(\mathfrak{U})$ – *множество допустимых управлений*. Введем в рассмотрение \mathfrak{Z} – некоторое гильбертово пространство наблюдений и оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Z})$, задающий наблюдение $z(t) = Cx(t)$. Заметим, что если $x \in H^1(\mathfrak{X})$, то $z \in H^1(\mathfrak{Z})$.

Определение 2. Вектор-функцию $u_0 \in H_\theta^{p+1}(\mathfrak{U})$ назовем *оптимальным управлением решениями задачи (2.1), (0.2)*, если

$$J(u_0) = \min_{u \in H_\theta^{p+1}(\mathfrak{U})} J(u). \quad (3)$$

Нашей целью является доказательство существования единственного управления $u_0 \in H_\theta^{p+1}(\mathfrak{U})$, минимизирующего функционал стоимости

$$J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|z^{(q)} - z_0^{(q)}\|_3^2 dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \rangle_{\mathfrak{U}} dt.$$

Здесь $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \dots, p+1$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $z_0 = z_0(t)$ – желаемое наблюдение. Справедлива

Теорема 2. Пусть оператор M (L, p) -секториален, и выполнены условия (A1)–(A3). Тогда для любых $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (1), (2).

Литература

1. Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Koln; Tokyo, 2003.
 2. Загребина С.А. Начально-конечная задача для эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2008. – №15 (115), вып. 1. – С. 23 – 26.
- Манакова Наталья Александровна, кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, manakova@hotmail.ru.

Дыльков Андрей Геннадьевич, кафедра математического анализа, Магнитогорский государственный университет, dylkov@masu.ru.

Поступила в редакцию 11 марта 2011 г.