

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА

Г.А. Лукина

## BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR THE LINEARIZED KORTEWEG – DE VRIES EQUATION

G.A. Lukina

Для линеаризованного уравнения Кортевега – де Фриза исследуются краевые задачи с заданием граничных условий интегрального вида. Доказываются теоремы разрешимости в классах регулярных решений.

*Ключевые слова:* линеаризованное уравнение Кортевега – де Фриза, интегральные граничные условия, регулярное решение, существование и единственность.

The boundary value problems with integral conditions for the linearized Korteweg – de Vries equation are investigated. We prove the existence and uniqueness theorems in the class of regular solutions.

*Keywords:* linearized Korteweg – de Vries equation, integral boundary conditions, regular solution, existence and uniqueness.

### Введение

Уравнения с кратными характеристиками активно изучаются в школе академика АН Республики Узбекистан Т.Д. Джураева – см. [1, 2]. Но нелокальные задачи с интегральными условиями для таких уравнений ранее не исследовались. Используемый в данной работе метод будет близок к методу [3, 4].

### 1. Постановка задач

Пусть  $\Omega$  есть интервал  $(0,1)$  оси  $Ox$ ,  $Q$  есть прямоугольник  $\Omega \times (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ . Далее, пусть  $\mu(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $K_1(x, t)$ ,  $K_2(x, t)$ ,  $K_3(x, t)$  – заданные функции, определенные при  $x \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$ .

**Краевая задача I:** найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$u_t + u_{xxx} - \mu(x, t)u = f(x, t) \quad (1.1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u(0, t) = \int_0^1 K_1(x, t)u(x, t)dx, \quad u(1, t) = \int_0^1 K_2(x, t)u(x, t)dx,$$

$$u_x(1, t) = \int_0^1 K_3(x, t)u(x, t)dx, \quad 0 < t < T. \quad (1.3)$$

**Краевая задача II:** найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а так же условия

$$u_{xx}(0, t) = \int_0^1 K_1(x, t)u(x, t)dx, \quad u(1, t) = \int_0^1 K_2(x, t)u(x, t)dx,$$

$$u_x(1, t) = \int_0^1 K_3(x, t)u(x, t)dx, \quad 0 < t < T. \quad (1.4)$$

## 2. Разрешимость краевой задачи I

Обозначим для краткости

$$V_0 = W_{2,x,t}^{3,1}(Q);$$

норма в пространстве  $V_0$  есть стандартная норма в анизотропном соболевском пространстве.

Пусть  $\epsilon$  есть фиксированное положительное число,  $V_1$  есть пространство

$$V_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in V_0, \quad v_{tt}(x, t) \in L_2(Q), \quad v_{xxxxx}(x, t) \in L_2(Q)\};$$

норму в  $V_2$  определим равенством

$$\|v\|_{V_1} = \left( \int_0^T \int_0^1 (\epsilon v_{tt}^2 + \epsilon v_{xxxxx}^2 + v_t^2 + v_{xxx}^2) dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Прежде чем доказывать разрешимость задачи I, заметим, что для функций  $v(x, t)$  из пространства  $V_1$  имеют место следующие неравенства:

$$\int_0^1 v_x^2(x, t) dx \leq \delta_0 \int_0^1 v_{xxx}^2(x, t) dx + C(\delta_0) \int_0^1 v^2(x, t) dx; \quad (2.1)$$

$$\int_0^1 v_{xx}^2(x, t) dx \leq \delta_0 \int_0^1 v_{xxx}^2(x, t) dx + C(\delta_0) \int_0^1 v^2(x, t) dx, \quad (2.2)$$

в которых  $\delta_0$  есть произвольное положительное число, число  $C$  вычисляется вполне определенным образом через  $\delta_0$ .

Проведем некоторые вспомогательные построения. Пусть  $B_i u$  есть интегральные операторы, действие которых определяется равенствами

$$(B_i u)(t) = \int_0^1 K_i(y, t)u(y, t)dy, \quad i = \overline{1, 3},$$

$w(x, t)$  есть функция

$$w(x, t) = u(x, t) - (x-1)^2(B_1 u)(t) + x(x-2)(B_2 u)(t) - x(x-1)(B_3 u)(t). \quad (2.3)$$

Умножая (2.3) поочередно на  $K_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  и интегрируя по  $x$  в пределах от 0 до 1, получим систему относительно  $(B_1u)(t)$ ,  $(B_2u)(t)$ ,  $(B_3u)(t)$ :

$$\begin{aligned} & [1 - \int_0^1 (x-1)^2 K_1(x, t) dx] (B_1u)(t) + \int_0^1 x(x-2) K_1(x, t) dx (B_2u)(t) - \\ & - \int_0^1 x(x-1) K_1(x, t) dx (B_3u)(t) = (B_1w)(t), \\ & - \int_0^1 (x-1)^2 K_2(x, t) dx (B_1u)(t) + [1 + \int_0^1 x(x-2) K_2(x, t) dx] (B_2u)(t) - \\ & - \int_0^1 x(x-1) K_2(x, t) dx (B_3u)(t) = (B_2w)(t), \\ & - \int_0^1 (x-1)^2 K_3(x, t) dx (B_1u)(t) + \int_0^1 x(x-2) K_3(x, t) dx (B_2u)(t) + \\ & + [1 - \int_0^1 x(x-1) K_3(x, t) dx] (B_3u)(t) = (B_3w)(t). \end{aligned}$$

Обозначим через  $\Delta_1(t)$  определитель этой системы. Если он не равен нулю при  $t \in [0, T]$ , то имеют место равенства

$$\begin{aligned} (B_1u)(t) &= a_1(t)(B_1w)(t) + a_2(t)(B_2w)(t) + a_3(t)(B_3w)(t), \\ (B_2u)(t) &= b_1(t)(B_1w)(t) + b_2(t)(B_2w)(t) + b_3(t)(B_3w)(t), \\ (B_3u)(t) &= c_1(t)(B_1w)(t) + c_2(t)(B_2w)(t) + c_3(t)(B_3w)(t), \end{aligned}$$

где функции  $a_i(t)$ ,  $b_i(t)$ ,  $c_i(t)$  вычисляются вполне определенным образом через  $K_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .

Из этих равенств и из (2.3) следует, что функция  $u(x, t)$  имеет представление

$$u(x, t) = w(x, t) + A_{11}(x, t)(B_1w)(t) + A_{21}(x, t)(B_2w)(t) + A_{31}(x, t)(B_3w)(t). \quad (2.4)$$

Определим операторы В и L:

$$\begin{aligned} (Bu)(x, t) &= u(x, t) - (x-1)^2(B_1u)(t) + x(x-2)(B_2u)(t) - x(x-1)(B_3u)(t), \\ Lu &= u_t + u_{xxx} - \mu(x, t)u. \end{aligned}$$

Далее, определим функцию  $\Phi(x, t, u)$

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, u) &= \int_0^1 [(x-1)^2 K_1(y, t) - x(x-2) K_2(y, t) + x(x-1) K_3(y, t)] u_{yyy}(y, t) dy + \\ & + \int_0^1 [-(x-1)^2 K_{1t}(y, t) + x(x-2) K_{2t}(y, t) - x(x-1) K_{3t}(y, t) + \\ & + (\mu(x, t) - \mu(y, t)) ((x-1)^2 K_1(y, t) + x(x-2) K_2(y, t) + x(x-1) K_3(y, t))] u(y, t) dy. \end{aligned}$$

Продолжая функцию  $\Phi(x, t, u)$  с помощью (2.4) и используя условие

$$K_i(0, t) = K_i(1, t) = K_{iy}(0, t) \equiv 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.5)$$

получим представление:

$$\Phi(x, t, u) = \Phi_1(x, t, w) = \int_0^1 N_1(x, y, t) w(y, t) dy,$$

в котором  $N_1(x, y, t)$  есть функция, вычисляемая через функции  $K_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , и  $\mu(x, t)$ .

Используя неравенство Гельдера, нетрудно получить оценку

$$\Phi_1^2 \leq \bar{N}_1 \int_0^1 w^2(x, t) dx, \quad (2.6)$$

в которой постоянная  $\bar{N}_1$  определяется функциями  $\mu(x, t)$ ,  $K_i(x, \tau)$ ,  $i = \bar{1}, \bar{3}$ .

Введем обозначения:  $\mu_1 = \max_{\bar{Q}} |\mu_{xxx}(x, t)|$ ;  $\mu_2 = \max_{\bar{Q}} |\mu_{xx}(x, t)|$ ;  $\mu_3 = \max_{\bar{Q}} |\mu_x(x, t)|$ .

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (2.5) и

$$\mu(x, t) \in C^3(\bar{Q}), \quad -\mu(x, t) \geq \mu_0 > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \bar{Q}; \quad (2.7)$$

$$\mu_t(x, T) \leq 0 \quad \text{при } x \in \bar{\Omega}; \quad (2.8)$$

$$\mu_0^2 - \bar{N}_1 > 0; \quad (2.9)$$

$$K_i(x, t) \in C^3(\bar{Q}), \quad i = \bar{1}, \bar{3};$$

$$\Delta_1(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T];$$

$$f(x, t) \in L_2(Q).$$

Тогда краевая задача I имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_1$ .

*Доказательство.* Пусть  $g(x, t)$  есть заданная функция из  $L_2(Q)$ . Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$w_t + w_{xxx} - \mu(x, t)w = g(x, t) + \Phi_1(x, t, w) \quad (2.10)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ w(0, t) &= w(1, t) = w_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Разрешимость рассматриваемой краевой задачи для уравнения (2.10) докажем, используя метод регуляризации и метод продолжения по параметру.

Пусть  $\varepsilon$  есть фиксированное положительное число. Рассмотрим краевую задачу с параметром  $\varepsilon$ : найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$-\varepsilon w_{tt} + w_t - \varepsilon w_{xxxxxx} + w_{xxx} - \mu(x, t)w = g(x, t) + \Phi_1(x, t, w) \quad (2.10_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= w_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \\ w(0, t) &= w(1, t) = w_x(1, t) = 0, \\ w_{xxx}(0, t) &= w_{xxx}(1, t) = w_{xxxx}(0, t) = 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.11^*)$$

Пусть  $\lambda$  есть число из отрезка  $[0, 1]$ . Рассмотрим семейство краевых задач: найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$-\varepsilon w_{tt} + w_t - \varepsilon w_{xxxxxx} + w_{xxx} - \mu(x, t)w = g(x, t) + \lambda \Phi_1(x, t, w) \quad (2.10_{\varepsilon, \lambda})$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.11\*).

Разрешимость рассматриваемой краевой задачи для уравнения ((2.10<sub>ε,λ</sub>)) докажем с помощью теоремы о методе продолжения по параметру [5].

Обозначим через  $\Lambda$  множество всех чисел  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ , для которых краевая задача (2.10 $_{\epsilon, \lambda}$ ), (2.11\*) имеет решение  $w(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_1$  при выполнении всех условий теоремы 1, фиксированном  $\epsilon$  и любой функции  $g(x, t)$  из  $L_2(Q)$ . Если мы покажем, что множество  $\Lambda$  не пусто, открыто и замкнуто, то оно, как известно (см. [5]), будет совпадать со всем отрезком  $[0, 1]$ .

При  $\lambda = 0$  краевая задача (2.10 $_{\epsilon, 0}$ ), (2.11\*) при выполнении всех условий теоремы 1 разрешима в пространстве  $V_1$  – см. [6]. Из этого следует, что число 0 принадлежит  $\Lambda$  и тем самым – что множество  $\Lambda$  не пусто.

Открытость и замкнутость множества  $\Lambda$  доказывается с помощью априорных оценок. Установим их наличие.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^T \int_0^1 [-\epsilon w_{tt} + w_t - \epsilon w_{xxxxx} + w_{xxx} - \mu(x, t)w] w dx dt = \int_0^T \int_0^1 [g(x, t) + \lambda \Phi_1(x, t, w)] w dx dt.$$

Интегрируя по частям, используя указанные выше граничные и начальные условия для функции  $w(x, t)$ , неравенство Юнга и условие (2.7), нетрудно перейти к следующему неравенству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 [\epsilon w_t^2 + \epsilon w_{xxx}^2 + \mu_0 w^2] dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 w^2(x, T) dx + \frac{1}{2} \int_0^T w_x^2(0, t) dt \leq \\ & \leq \frac{\delta_1^2}{2} \int_0^T \int_0^1 w^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_0^T \int_0^1 g^2(x, t) dx dt + \frac{\delta_2^2}{2} \int_0^T \int_0^1 w^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_2^2} \int_0^T \int_0^1 \Phi_1^2(x, t, w) dx dt, \end{aligned}$$

в котором  $\delta_1, \delta_2$  есть произвольные положительные числа.

Пусть  $\delta_2 = \sqrt{\mu_0}$ , тогда получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 [\epsilon w_t^2 + \epsilon w_{xxx}^2 + \frac{\mu_0}{2} w^2] dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 w^2(x, T) dx + \frac{1}{2} \int_0^T w_x^2(0, t) dt \leq \\ & \leq \frac{\delta_1^2}{2} \int_0^T \int_0^1 w^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_0^T \int_0^1 g^2(x, t) dx dt + \frac{1}{2\mu_0} \int_0^T \int_0^1 \Phi_1^2(x, t, w) dx dt. \end{aligned}$$

Далее, продолжаем полученное неравенство с помощью (2.6)

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 [\epsilon w_t^2 + \epsilon w_{xxx}^2 + \frac{\mu_0}{2} w^2] dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 w^2(x, T) dx + \frac{1}{2} \int_0^T w_x^2(0, t) dt \leq \\ & \leq \frac{\delta_1^2}{2} \int_0^T \int_0^1 w^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_0^T \int_0^1 g^2(x, t) dx dt + \frac{\bar{N}_1}{2\mu_0} \int_0^T \int_0^1 w^2 dx dt. \end{aligned}$$

Используя условия (2.9) и подбирая число  $\delta_1$  малым, нетрудно получить оценку

$$\int_0^T \int_0^1 [\epsilon w_t^2 + \epsilon w_{xxx}^2 + w^2] dx dt \leq M_1, \tag{2.12}$$

с постоянной  $M_1$ , определяющейся числом  $\mu_0$  и функцией  $g(x, t)$ .

Заметим, что имеет место следующая оценка

$$\int_0^T \int_0^1 \Phi_1^2 dx dt \leq M_2, \tag{2.13}$$

с постоянной  $M_2$ , определяющейся функциями  $K_i(x, t), i = \overline{1, 3}$ , и  $\mu(x, t)$ .

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int_0^T \int_0^1 [-\varepsilon w_{tt} + w_t - \varepsilon w_{xxxxxx} + w_{xxx} - \mu(x, t)w] w_{tt} dx dt = -\int_0^T \int_0^1 [g(x, t) + \lambda \Phi_1(x, t, w)] w_{tt} dx dt.$$

Вновь интегрируя по частям, используя указанные выше граничные и начальные условия для функции  $w(x, t)$ , неравенство Юнга и условие (2.7), от данного равенства переходим к следующему неравенству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 [\varepsilon w_{tt}^2 + \varepsilon w_{xxx}^2 + \mu_0 w_t^2 + \frac{1}{2} \mu_{tt}(x, t) w^2(x, t)] dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T w_{xt}^2(0, t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 w_t^2(x, 0) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \mu_t(x, T) w^2(x, T) dx \leq \\ & \leq \frac{\delta_3^2}{2} \int_0^T \int_0^1 w_{tt}^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_3^2} \int_0^T \int_0^1 g^2(x, t) dx dt + \frac{\delta_3^2}{2} \int_0^T \int_0^1 w_{tt}^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_3^2} \int_0^T \int_0^1 \Phi_1^2(x, t, w) dx dt, \end{aligned}$$

в котором  $\delta_3$  есть произвольное положительное число.

Фиксируя  $\delta_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$  и используя оценки (2.12), (2.13), получаем, что из данного неравенства вытекает оценка

$$\int_0^T \int_0^1 [\varepsilon w_{tt}^2 + \varepsilon w_{xxx}^2 + w_t^2] dx dt \leq M_3, \tag{2.14}$$

с постоянной  $M_3$ , определяющейся функциями  $g(x, t), K_i(x, t), i = \overline{1, 3}, \mu(x, t)$  и числом  $\varepsilon$ .

Далее, рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & -\int_0^T \int_0^1 [-\varepsilon w_{tt} + w_t - \varepsilon w_{xxxxxx} + w_{xxx} - \mu(x, t)w] w_{xxxxxx} dx dt = \\ & = -\int_0^T \int_0^1 [g(x, t) + \lambda \Phi_1(x, t, w)] w_{xxxxxx} dx dt. \end{aligned}$$

Вновь интегрируя по частям, используя указанные выше граничные и начальные условия для функции  $w(x, t)$ , переходим к следующему равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 [\varepsilon w_{xxxxxx}^2 + \varepsilon w_{xxx}^2 - \mu(x, t)w_{xxx}^2] dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 w_{xxx}^2(x, T) dx + \frac{1}{2} \int_0^T w_{xxx}^2(1, t) dt = \\ & = \int_0^T \int_0^1 [\mu_{xxx} w w_{xxx} + 3\mu_{xx} w_x w_{xxx} + 3\mu_x w_{xx} w_{xxx} - g(x, t)w_{xxxxxx} - \Phi_1(x, t, w)w_{xxxxxx}] dx dt. \end{aligned}$$

Используя условия (2.7) и оценивая слагаемые правой части с помощью неравенств Юнга, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 [\varepsilon w_{xxxxxx}^2 + \varepsilon w_{xxx}^2 + \mu_0 w_{xxx}^2] dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 w_{xxx}^2(x, T) dx + \frac{1}{2} \int_0^T w_{xxx}^2(1, t) dt \leq \\ & \leq \int_0^T \int_0^1 [\frac{\delta_4^2}{2} w_{xxx}^2 + \frac{\mu_1^2}{2\delta_4^2} w^2 + \frac{\delta_4^2}{2} w_{xxx}^2 + \frac{9\mu_2^2}{2\delta_4^2} w_x^2 + \frac{\delta_4^2}{2} w_{xxx}^2 + \frac{9\mu_3^2}{2\delta_4^2} w_{xx}^2] dx dt + \\ & \frac{\delta_5^2}{2} \int_0^T \int_0^1 w_{xxxxxx}^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_5^2} \int_0^T \int_0^1 g^2(x, t) dx dt + \frac{\delta_5^2}{2} \int_0^T \int_0^1 w_{xxxxxx}^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_5^2} \int_0^T \int_0^1 \Phi_1^2(x, t, w) dx dt, \end{aligned}$$

в котором  $\delta_4, \delta_5$  есть произвольные положительные числа.

Далее, пусть  $\delta_5 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ . Используя условия (2.1) и (2.2), получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 [\varepsilon w_{xxxt}^2 + \frac{\varepsilon}{2} w_{xxxxx}^2 + \mu_0 w_{xxx}^2] dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 w_{xxx}^2(x, T) dx + \frac{1}{2} \int_0^T w_{xxxx}^2(1, t) dt \leq \\ & \leq \int_0^T \int_0^1 [\frac{3\delta_4^2}{2} + \frac{9\delta_0}{2\delta_4^2} (\mu_2^2 + \mu_3^2)] w_{xxx}^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 [\frac{\mu_1^2}{2\delta_4^2} + \frac{9C(\delta_0)}{2\delta_4^2} (\mu_2^2 + \mu_3^2)] w^2 dx dt + \\ & \quad \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_0^1 g^2(x, t) dx dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_0^1 \Phi_1^2(x, t, w) dx dt. \end{aligned}$$

Фиксируя числа  $\delta_4 = \sqrt{\frac{\mu_0}{3}}$ ,  $\delta_0 = \frac{\mu_0^2}{27(\mu_2^2 + \mu_3^2)}$  и применяя (2.1) и (2.2), приходим к следующей оценке

$$\int_0^T \int_0^1 [\varepsilon w_{xxxt}^2 + \varepsilon w_{xxxxx}^2 + w_{xxx}^2] dx dt \leq M_4, \tag{2.15}$$

с постоянной  $M_4$ , определяющейся функциями  $g(x, t)$ ,  $K_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $\mu(x, t)$  и числами  $\varepsilon$ ,  $\mu_0$ .

Оценки (2.12), (2.14) и (2.15) дают очевидную априорную оценку

$$\|w\|_{V_1} \leq M_0. \tag{2.16}$$

Как уже говорилось выше, этой оценки достаточно для применения теоремы о методе продолжения по параметру. Следовательно, при выполнении условий теоремы 1 краевая задача (2.10 $_{\varepsilon, \lambda}$ ), (2.11\*) имеет решение  $w(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_1$ , при всех значениях  $\lambda$ , в том числе и при  $\lambda = 1$ .

Априорной оценки (2.16) вполне достаточно для перехода в семействе решений задачи (2.10 $_{\varepsilon}$ ), (2.11\*) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , предельная функция  $w(x, t)$  будет решением краевой задачи (2.10), (2.11), принадлежащим пространству  $V_1$ .

Определим теперь функцию  $u(x, t)$  с помощью (2.4). Далее, справедливо равенство

$$BLu = (Lw)(x, t) - \Phi_1(x, t, w) = g(x, t).$$

Выберем функцию  $g(x, t)$  специальным образом:  $g(x, t) = (Bf)(x, t)$ .

Очевидно теперь, что функция  $u(x, t)$  есть решение краевой задачи I. Принадлежность  $u(x, t)$  пространству  $V_1$  очевидна. □

### 3. Разрешимость краевой задачи II

Вновь проведем некоторые вспомогательные построения. Пусть  $B_i u$  есть интегральные операторы, определенные в п.2,  $w(x, t)$  есть функция

$$w(x, t) = u(x, t) - \frac{1}{2}(x-1)^2(B_1 u)(t) - (B_2 u)(t) - (x-1)(B_3 u)(t). \tag{3.1}$$

Умножая (3.1) поочередно на  $K_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  и интегрируя по  $x$  в пределах от 0 до 1, получим систему относительно  $(B_1 u)(t)$ ,  $(B_2 u)(t)$ ,  $(B_3 u)(t)$ :

$$\begin{aligned}
 & [1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 K_1(x,t) dx](B_1 u)(t) - \int_0^1 K_1(x,t) dx (B_2 u)(t) - \\
 & - \int_0^1 (x-1) K_1(x,t) dx (B_3 u)(t) = (B_1 w)(t), \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 K_2(x,t) dx (B_1 u)(t) + [1 - \int_0^1 K_2(x,t) dx](B_2 u)(t) - \\
 & - \int_0^1 (x-1) K_2(x,t) dx (B_3 u)(t) = (B_2 w)(t), \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 K_3(x,t) dx (B_1 u)(t) - \int_0^1 K_3(x,t) dx (B_2 u)(t) + \\
 & + [1 - \int_0^1 (x-1) K_3(x,t) dx](B_3 u)(t) = (B_3 w)(t).
 \end{aligned}$$

Обозначим через  $\Delta_2(t)$  определитель этой системы. Если он не равен нулю при  $t \in [0, T]$ , то вновь можно выразить функции  $(B_i u)(t)$  через функции  $(B_i w)(t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . Вновь функция  $u(x, t)$  имеет представление

$$u(x, t) = w(x, t) + A_{12}(x, t)(B_1 w)(t) + A_{22}(x, t)(B_2 w)(t) + A_{32}(x, t)(B_3 w)(t), \quad (3.2)$$

где функции  $A_{12}(x, t)$ ,  $A_{22}(x, t)$ ,  $A_{32}(x, t)$  вычисляются вполне определенным образом через  $K_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .

Определим оператор В:

$$(Bu)(x, t) = u(x, t) - \frac{1}{2}(x-1)^2(B_1 u)(t) - (B_2 u)(t) - (x-1)(B_3 u)(t).$$

Далее, определим функцию  $\Phi(x, t, u)$

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, t, u) = & \int_0^1 [\frac{1}{2}(x-1)^2 K_1(y, t) + K_2(y, t) + (x-1)K_3(y, t)] u_{yyy}(y, t) dy + \\
 & + \int_0^1 [-\frac{1}{2}(x-1)^2 K_{1t}(y, t) - K_{2t}(y, t) - (x-1)K_{3t}(y, t) + \\
 & + (\mu(x, t) - \mu(y, t))(\frac{1}{2}(x-1)^2 K_1(y, t) + K_2(y, t) + (x-1)K_3(y, t))] u(y, t) dy.
 \end{aligned}$$

Продолжая функцию  $\Phi(x, t, u)$  с помощью (3.2) и используя условие

$$K_i(1, t) = K_{iy}(0, t) = K_{iyy}(0, t) \equiv 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (3.3)$$

получим представление:

$$\Phi(x, t, u) = \Phi_2(x, t, w) = \int_0^1 N_2(x, y, t) w(y, t) dy,$$

в котором  $N_2(x, y, t)$  есть функция, вычисляемая через функции  $K_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , и  $\mu(x, t)$ .

Используя неравенство Гельдера, нетрудно получить неравенство

$$\Phi_2^2 \leq \overline{N}_2 \int_0^1 w^2(x, t) dx,$$

в которой постоянная  $\overline{N}_2$  определяется функциями  $\mu(x, t)$ ,  $K_i(x, \tau)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .



**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (3.3) и

$$\begin{aligned} \mu(x, t) \in C^3(\overline{Q}), \quad -\mu(x, t) \geq \mu_0 > 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \overline{Q}; \\ \mu_t(x, T) \leq 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}; \\ \mu_0^2 - \overline{N}_2 > 0; \\ K_i(x, t) \in C^3(\overline{Q}), \quad i = \overline{1, 3}; \\ \Delta_2(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]; \\ f(x, t) \in L_2(Q). \end{aligned}$$

Тогда краевая задача II имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_1$ .

*Доказательство.* Пусть  $g(x, t)$  есть заданная функция из  $L_2(Q)$ . Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$w_t + w_{xxx} - \mu(x, t)w = g(x, t) + \Phi_2(x, t, w) \quad (3.4)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} w(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ w(0, t) = w(1, t) = w_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Разрешимость рассматриваемой краевой задачи для уравнения (3.4) докажем, используя метод регуляризации.

Пусть  $\varepsilon$  есть фиксированное положительное число. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$-\varepsilon w_{tt} + w_t + w_{xxx} - \mu(x, t)w = g(x, t) + \Phi_2(x, t, w) \quad (3.4_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} w(x, 0) = w_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \\ w_{xx}(0, t) = w(1, t) = w_x(1, t) = 0. \end{aligned} \quad (3.5^*)$$

Для нее выполняется априорная оценка

$$\|u\|_{V_1} \leq M_0,$$

с постоянной  $M_0$ , определяющейся функциями  $g(x, t)$ ,  $K_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $\mu(x, t)$  и числами  $\varepsilon$ ,  $\mu_0$  (доказательство этой оценки проводится аналогично доказательству оценки (2.16)). Этой априорной оценки вполне достаточно для перехода в семействе решений задачи (3.4<sub>ε</sub>), (3.5\*) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , предельная функция  $w(x, t)$  будет решением краевой задачи (3.4), (3.5), принадлежащим пространству  $V_1$ .

Определим теперь функцию  $u(x, t)$  с помощью (3.2). Далее, справедливо равенство

$$BLu = (Lw)(x, t) - \Phi_2(x, t, w) = g(x, t).$$

Выберем функцию  $g(x, t)$  специальным образом:  $g(x, t) = (Bf)(x, t)$ .

Очевидно теперь, что функция  $u(x, t)$  есть решение краевой задачи II. Принадлежность  $u(x, t)$  пространству  $V_1$  очевидна.  $\square$

**Замечание 1.** В [7] рассматривалась нелокальная краевая задача для уравнения (1.1) типа задачи II, при этом нелокальное условие имело вид  $u_{xx}(x, t) = \lambda u(x_0, t)$ , другие же краевые условия были локальными.

*Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 гг. по мероприятию 1.3.1.*

## Литература

1. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно – составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
2. Джураев, Т.Д. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками / Т.Д. Джураев, Ю.П. Апаков // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2007. – Т. 15, №2. – С. 18 – 26.
3. Абдрахманов, А.М. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка / А.М. Абдрахманов, А.И. Кожанов // Изв. вузов. Математика. – 2007. – №5. – С. 3 – 12.
4. Абдрахманов, А.М. О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнения нечетного порядка / А.М. Абдрахманов // Математические заметки. – 2010. – Т. 88, №2. – С. 163 – 172.
5. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин – М.: Наука, 1980.
6. Якубов, С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. – Баку: Элм, 1985.
7. Балкизов, Ж.А. Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками / Ж.А. Балкизов // Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: материалы Первой Всерос. конф. молодых ученых. – Терское, 2010. – С. 39 – 41.

Галина Александровна Лукина, кафедра общей математики, Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета имени М.К. Аммосова в г. Мирном, lukina-g@mail.ru.

*Поступила в редакцию 2 февраля 2011 г.*