УДК 517.983.5

ВЫРОЖДЕННЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

М.В. Фалалеев, С.С. Орлов

DEGENERATED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SPECIAL KIND IN BANACH SPACES AND IT'S APPLICATIONS

M.V. Falaleev, S.S. Orlov

В статье методами теории фундаментальных оператор-функций сингулярных интегро-дифференциальных операторов исследован специальный класс вырожденных линейных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, для которого получены достаточные условия существования и единственности классического решения задачи Коши. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примере двух начально-краевых задач, возникающих в математической теории вязкоупругости.

Ключевые слова: банаховы пространства, распределения, фундаментальная оператор-функция.

In this paper a special class of degenerated linear integro-differential equations in Banach spaces is investigated by the methods of the theory of fundamental operator-functions of singular integro-differential operators. Sufficient conditions of existence and uniqueness of Cauchy problem of classical solution are obtained. Abstract results are illustrated by two initial boundary value problems, arised in mathematical theory of viscoelasticity.

Keywords: Banach spaces, distributions, a fundamental operator-function.

Введение

В работе рассмотрены интегро-дифференциальное уравнение

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int_0^t g(t-s)Au(s)ds + f(t), \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,\ \ldots,\ u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \tag{2}$$

где $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in Cl(E_1, E_2)$, B необратим, E_1, E_2 — банаховы пространства $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и уравнение вида

$$B\ddot{u}(t) = A_1\dot{u}(t) + A_0u(t) + \int_0^t g(t-s)A_0u(s)ds + f(t),$$

в котором B, A_1, $A_0 \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, B необратим. Ранее авторами в [1] с помощью конструкции фундаментальной оператор-функции вырожденного интегро-дифференциального оператора, соответствующего уравнению (1), начальная задача (1), (2) была исследована в условиях фредгольмовости оператора B, а именно, были получены условия однозначной разрешимости задачи Коши в классе распределений с ограниченным слева носителем, изучена связь между обобщенным и классическим решениями, полученные на этой основе теоремы применены к решению начально-краевой задачи о колебании вязкоупругой пластины с памятью.

В данной заметке задача (1), (2) исследована с помощью теории полугрупп операторов с ядрами [2, 3]. Получены условия существования и единственности решения в предположениях спектральной ограниченности операторного пучка. Отметим, что синтез идей теории полугрупп операторов с ядрами и теории фундаментальных оператор-функций ранее уже показал свою эффективность при исследовании некоторых классов сингулярных операторно-дифференциальных уравнений [5, 6]. Для интегро-дифференциальных уравнений такой подход применяется впервые.

Наконец, кроме чисто теоретического интереса для авторов изучаемый класс уравнений имеет важное значение для решения некоторых начально-краевых задач математической теории вязкоупругости.

1. Обобщенное и классическое решения задачи Коши (1), (2): условия существования и единственности, методы построения

Пусть $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in Cl(E_1, E_2)$, E_1, E_2 — банаховы пространства, B необратим, A замкнут, ядро $g(t)$ аналитическая вещественнозначная функция неотрицательного вещественного аргумента t.

Определение 1. *Классическим решением начальной задачи (1), (2) называется функция $u(t)$ класса $\mathcal{C}^N(t \geq 0; E_1) \equiv C_+^N(E_1)$ (сильно непрерывно дифференцируемая N раз), обращающая в тождество уравнение (1) и удовлетворяющая начальным условиям (2).*

В обобщенных функциях задачу Коши (1), (2) можно переписать в виде [4] следующего сверточного уравнения:

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \tilde{u}(t) =$$
$$= f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta^{(N-2)} + \ldots + Bu_0\delta^{(N-1)}(t), \quad (3)$$

которое в классе $K'_+(E_1)$ распределений с ограниченным слева носителем имеет единственное решение вида

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * (f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta^{(N-2)} + \ldots + Bu_0\delta^{(N-1)}(t)). \quad (4)$$

Здесь $\mathcal{E}_N(t)$ — обобщенная оператор-функция [4], удовлетворяющая условиям

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * v(t) = v(t), \forall\ v(t) \in K'_+(E_2),$$

$$\mathcal{E}_N(t) * (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * w(t) = w(t), \forall\ w(t) \in K'_+(E_1)$$

и называемая фундаментальной оператор-функцией вырожденного интегро-дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t))$.

Изложению основных результатов предпошлем некоторые вспомогательные сведения из [2, 3] в удобных для нас обозначениях.

Определение 2. *Резольвентным множеством оператора A относительно оператора B (или B-резольвентным множеством оператора A) называется множество*

$$\rho^B = \left\{\mu \in \mathbb{C}: \ (\mu B - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)\right\},$$

а оператор-функция $(\mu B - A)^{-1}$ называется резольвентой оператора A относительно оператора B (или B-резольвентой оператора A).

Определение 3. *Оператор A называется спектрально ограниченным относительно оператора B (или (B,σ)-ограниченным), если $\exists\ a > 0$ такое, что вне круга радиуса a оператор $(\mu B - A)$ непрерывно обратим.*

Пусть $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C}: \ |\mu| = r > a\}$, тогда пара операторов [2, 3]

$$P = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(\mu B - A)^{-1}B d\mu, \ Q = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}B(\mu B - A)^{-1}d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно, порождают разложения этих пространств в прямые суммы $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = N(P) \oplus R(P)$, $E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = N(Q) \oplus R(Q)$. Действия операторов B и A расщепляются, причем $A_0 : \ E_1^0 \to E_2^0$, $B_1 : \ E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1 : \ E_1^1 \to E_2^1$ ограничен, $QB = BP$, $QA = AP$.

Замечание 1. Если $\exists\ p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ такое, что $(A_0^{-1}B_0)^p \neq \mathbb{O}$, но $(A_0^{-1}B_0)^{p+1} \equiv \mathbb{O}$, то бесконечно удаленная точка называется несущественно особой точкой (устранимой при p=0 и полюсом при $p \in \mathbb{N}$) B-резольвенты оператора A.

Теорема 1. *Пусть оператор A спектрально ограничен относительно B, тогда вырожденный интегро-дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - g(t)A\theta(t))$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(\delta(t) + g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) -$$

$$- \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I_2 - Q)\delta^{(qN)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{q+1},$$

где $r(t)$ — резольвента ядра $(-g(t))$, под k-ой степенью обобщенных функций $(\delta(t)+g(t)\theta(t))$ и $(\delta(t) + r(t)\theta(t))$ понимается их k-кратная свертка, причем

$$(\delta(t) + g(t)\theta(t))^0 = \delta(t).$$

Доказательство. Согласно определению фундаментальной оператор-функции, требуется проверить два равенства:

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I_2\delta(t), \ \mathcal{E}_N(t) * (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) = I_1\delta(t),$$

где I_1, I_2 — тождественные операторы в E_1 и E_2 соответственно. Справедлива цепочка равенств

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = \left(B\delta^{(N)}(t) - A(\delta(t) + g(t)\theta(t))\right) * \mathcal{E}_N(t) =$$

$$= BB_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^k Q(\delta(t) + g(t)\theta(t))^k * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) + BB_1^{-1}Q\delta(t) -$$

$$-B\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I_2-Q)\delta^{((q+1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}-$$

$$-AB_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+$$

$$+A\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I_2-Q)\delta^{(qN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^q=$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^kQ(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+Q\delta(t)-$$

$$-B_0\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I_2-Q)\delta^{((q+1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}-$$

$$-\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^kQ(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+$$

$$+B_0\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I_2-Q)\delta^{((q+1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}+AA_0^{-1}(I_2-Q)\delta(t)=$$

$$=Q\delta(t)+(I_2-Q)\delta(t)=I_2\delta(t).$$

Учитывая псевдокоммутирование $QB=BP$, $QA=AP$, второе равенство также докажем непосредственной проверкой, а именно

$$\mathcal{E}_N(t)*(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))=\mathcal{E}_N(t)*\big(B\delta^{(N)}(t)-A(\delta(t)+g(t)\theta(t))\big)=$$

$$=B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^kBP(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+B_1^{-1}BP\delta(t)-$$

$$-\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}B(I_1-P)\delta^{((q+1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}-$$

$$-B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}AP(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+$$

$$+\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}A(I_1-P)\delta^{(qN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^q=$$

$$=B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}A_1P(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+P\delta(t)-$$

$$-\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}(I_1-P)\delta^{((q+1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}-$$

$$-B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}A_1P(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+$$

$$+\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}(I_1-P)\delta^{((q+1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}+A_0^{-1}A(I_1-P)\delta(t)=$$

$$=P\delta(t)+(I_1-P)\delta(t)=I_1\delta(t).$$

□

Замечание 2. Если в теореме 1 дополнительно предположить, что ∞ — несущественно особая точка B-резольвенты оператора A, то

$$\mathcal{E}_N(t)=B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k-1}*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)-$$
$$-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I_2-Q)\delta^{(qN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1},$$

где $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ (см. замечание 1).

Замечание 3. Теорема 1 допускает обобщение на случаи сильной (B,p)-секториальности и сильной (B,p)-радиальности оператора $A\in\mathcal{C}l(E_1,E_2)$ [2, 3].

Замечание 4. Наиболее простой вид фундаментальная оператор-функция принимает в случае $p=0$ (т. е. ∞ — устранимая особая точка $(\mu B-A)^{-1}$), а именно

$$\mathcal{E}_N(t)=B_1^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*(I_2\delta(t)+R_N(t)\theta(t))Q-A_0^{-1}(I_2-Q)(\delta(t)+r(t)\theta(t)),$$

здесь $R_N(t)$ — резольвента ядра $A_1B_1^{-1}(\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds)$.

Замечание 5. В условиях теоремы 1 задача Коши (1), (2) имеет в классе $K'_+(E_1)$ единственное решение вида (4). Если бесконечно удаленная точка является устранимой особой точкой B-резольвенты оператора A, то формула (4) приобретает вид

$$\tilde{u}(t)=u(t)\theta(t)=\Bigg[\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}Pu_{k-1}+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\tilde{R}_N(s)Pu_{k-1}ds\right)-A_0^{-1}(I_2-Q)f(t)+$$
$$+\int\limits_0^t\left(\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}B_1^{-1}Q-r(t-s)A_0^{-1}(I_2-Q)\right)f(s)ds+\tag{5}$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}B_1^{-1}R_N(\tau)Qf(s)d\tau ds\Bigg]\theta(t),$$

где $\tilde{R}_N(t)$ — резольвента ядра $B_1^{-1}A_1(\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds)$.

Замечание 6. Построенное решение (5) представляет собой регулярную обобщенную функцию. Заметим, что $u(t)\in C_+^N(E_1)$, если $A_0^{-1}(I_2-Q)f(t)\in C_+^N(E_1)$, и, так как $\tilde{u}(t)$ является решением уравнения (3), функция $u(t)$ обращает в тождество уравнение (1). Нетрудно установить, что

$$u^{(k-1)}(0) = Pu_{k-1} - A_0^{-1}(I_2 - Q)\left(f^{(k-1)}(0) + \sum_{i=1}^{k-1} r^{(i-1)}(0) f^{(k-i-1)}(0)\right),\ k = 1,\ \ldots,\ N,$$

тогда для того, чтобы функция $u(t)$ удовлетворяла начальным условиям (2) достаточно выполнения следующих соотношений:

$$(I_1 - P)u_{k-1} + A_0^{-1}(I_2 - Q)\left(f^{(k-1)}(0) + \sum_{i=1}^{k-1} r^{(i-1)}(0) f^{(k-i-1)}(0)\right) = 0,\ k = 1,\ \ldots,\ N,$$

или

$$A_0^{-1}(I_2 - Q)\left(Au_{k-1} + f^{(k-1)}(0) + \sum_{i=1}^{k-1} r^{(i-1)}(0) f^{(k-i-1)}(0)\right) = 0,\ k = 1,\ \ldots,\ N,$$

которые описывают множество правых частей уравнения (1) и начальных данных (2), при которых задача Коши (1), (2) однозначно разрешима в классе $C_+^N(E_1)$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, ∞ — устранимая особая точка B-резольвенты оператора A, $A_0^{-1}(I_2 - Q)f(t) \in C_+^N(E_1)$ и*

$$(I_1 - P)u_{k-1} + A_0^{-1}(I_2 - Q)\left(f^{(k-1)}(0) + \sum_{i=1}^{k-1} r^{(i-1)}(0) f^{(k-i-1)}(0)\right) = 0,\ k = 1,\ \ldots,\ N,$$

тогда задача Коши (1),(2) имеет единственное классическое решение вида (5).

2. Некоторые задачи теории вязкоупругости

В этом пункте, опираясь на полученные выше результаты, проведем исследование двух начально-краевых задач, возникающих при изучении вязкоупругих процессов.

Пример 1. Рассмотрим уравнение [7]

$$(\lambda - \Delta)\frac{\partial}{\partial t}u(t,\bar{x}) - \Delta u(t,\bar{x}) - \int_0^t h(t-\tau)\Delta u(\tau,\bar{x})d\tau = f(t,\bar{x}),\ t > 0,\ \bar{x} \in \Omega,$$

где λ — вещественная постоянная, $h(t) \in C^\infty(t \geq 0)$. Будем искать решение, определенное в цилиндрической области $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, непрерывно дифференцируемое один раз по t и не менее двух раз по совокупности пространственных переменных, удовлетворяющее начальному

$$u(t,\bar{x})|_{t=0} = u_0(\bar{x}),\ \bar{x} \in \Omega,$$

и однородному граничному

$$u(t,\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0,\ (t,\bar{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega,$$

условиям. Если положить

$$E_1 \equiv \overset{\circ}{H}{}^{k+2}(\Omega) = \left\{v(\bar{x}) : v(\bar{x}) \in H^{k+2}(\Omega),\ v(\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0\right\},\ E_2 \equiv H^k(\Omega),$$

$$B = \lambda - \Delta, \ A = \Delta, \ g(t) = h(t),$$

то рассматриваемая начально-краевая задача редуцируется к задаче Коши (1), (2) с $N = 1$.

Заметим, что случаи $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ и $\lambda \in \sigma(\Delta)$ подлежат отдельному рассмотрению. В первом из них $B = \lambda - \Delta$ — непрерывно обратимый оператор, что влечет собой (B, p)-ограниченность оператора $A = \Delta$ и отсутствие в лорановском разложении оператор-функции $(\mu B - A)^{-1}$ членов с положительными степенями μ, т. е. ∞ — устранимая особая точка B-резольвенты оператора A. При этом $P = I_1$, $Q = I_2$, $B_1^{-1} = B^{-1}$, $A_1 = A$. Если $\lambda \in \sigma(\Delta)$, то, как показано в работе [3], оператор A является (B, σ)-ограниченным и ∞ устранимая особая точка.

Таким образом, выполнены условия теоремы 2, из которой следует

Теорема 3.

A) *Пусть $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ и $f(t, \bar{x}) \in C(t \geq 0; E_2)$, тогда задача Коши-Дирихле имеет единственное решение класса $C^1(t \geq 0; E_1)$, определяемое формулой*

$$u(t, \bar{x}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \int_0^t p_k(s) ds\right) \langle u_0, \varphi_k \rangle + \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \int_0^t \left(1 + \int_0^{t-s} p_k(\tau) d\tau\right) \langle f(s, \bar{x}), \varphi_k \rangle \, ds \right] \varphi_k$$

B) *Пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$ и $\langle f(t, \bar{x}), \ \varphi_k \rangle \in C^1(t \geq 0)$, $\lambda_k = \lambda$, тогда, если*

$$\langle \lambda u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \ \varphi_k \rangle = 0, \ \lambda_k = \lambda,$$

то задача Коши-Дирихле имеет единственное решение класса $C^1(t \geq 0; E_1)$, определяемое формулой

$$u(t, \bar{x}) = \sum_{\lambda_k \neq \lambda} \left[\left(1 + \int_0^t p_k(s) ds\right) \langle u_0, \varphi_k \rangle + \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \int_0^t \left(1 + \int_0^{t-s} p_k(\tau) d\tau\right) \langle f(s, \bar{x}), \varphi_k \rangle \, ds \right] \varphi_k$$

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_k = \lambda} \left[\langle f(t, \bar{x}), \varphi_k \rangle + \int_0^t p(t-s) \langle f(s, \bar{x}), \varphi_k \rangle \, ds \right] \varphi_k,$$

где $p_k(t)$ — резольвента ядра $\frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}(1 + \int_0^t h(s) ds)$, $p(t)$ — резольвента ядра $(-h(t))$, $\{\varphi_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ - ортонормированное семейство собственных функций и собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω, занумерованные по убыванию собственных значений с учетом кратности.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, \bar{x}) + \Delta^2 u(t, \bar{x}) - \int_0^t h(t - \tau) \Delta^2 u(\tau, \bar{x}) d\tau = f(t, \bar{x}), \ t > 0, \ \bar{x} \in \Omega,$$

которое в случае $n = 2$ и $f(t, x_1, x_2) \equiv 0$ описывает колебания вязкоупругой пластины с памятью [7]. Зададим для него начальные и граничные условия

$$u(t, \bar{x})|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \ \left. \frac{\partial}{\partial t} u(t, \bar{x}) \right|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \ \bar{x} \in \Omega,$$

$$u(t,\bar{x})|_{\overline{x}\in\partial\Omega}=0,\ \ (t,\bar{x})\in\mathbb{R}_+\times\partial\Omega.$$

Выбирая

$$E_1\equiv\overset{\circ}{H}{}^{k+4}(\Omega)=\left\{v(\bar{x}):v(\bar{x})\in H^{k+4}(\Omega),\ \ v(\bar{x})|_{\overline{x}\in\partial\Omega}=0\right\},\ E_2\equiv H^k(\Omega),$$

$$B=\lambda-\Delta,\ A=-\Delta^2,\ g(t)=-h(t),$$

редуцируем рассматриваемую задачу Коши-Дирихле к начальной задаче (1), (2) при $N=2$. Как и в предыдущем примере рассмотрим два случая: $\lambda\notin\sigma(\Delta)$ и $\lambda\in\sigma(\Delta)$.

Теорема 4.

A) Пусть $\lambda\notin\sigma(\Delta)$ и $f(t,\bar{x})\in C(t\geq 0;E_2)$, тогда задача Коши-Дирихле имеет единственное решение класса $C^2(t\geq 0;E_1)$, определяемое формулой

$$u(t,\bar{x})=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\Big(1+\int\limits_0^t q_k(s)ds\Big)\langle u_0,\varphi_k\rangle+\int\limits_0^t\Big(1+(t-s)q_k(s)\Big)ds\,\langle u_1,\varphi_k\rangle+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda-\lambda_k}\int\limits_0^t\Big(\int\limits_0^{t-s}(1+q_k(\tau))d\tau\Big)\langle f(s,\bar{x}),\varphi_k\rangle\,ds\right]\varphi_k$$

B) Пусть $\lambda\in\sigma(\Delta)$ и $\langle f(t,\bar{x}),\ \varphi_k\rangle\in C^2(t\geq 0)$, $\lambda_k=\lambda$, тогда, если

$$\left\langle-\lambda^2u_0(\bar{x})+f(0,\bar{x}),\ \varphi_k\right\rangle=0,\ \left\langle-\lambda^2u_1(\bar{x})+f'(0,\bar{x})+h(0)f(0,\bar{x}),\ \varphi_k\right\rangle=0,\ \lambda_k=\lambda,$$

то задача Коши-Дирихле имеет единственное решение класса $C^2(t\geq 0;E_1)$, определяемое формулой

$$u(t,\bar{x})=\sum_{\lambda_k\neq\lambda}\left[\Big(1+\int\limits_0^t q_k(s)ds\Big)\langle u_0,\varphi_k\rangle+\int\limits_0^t\Big(1+(t-s)q_k(s)\Big)ds\,\langle u_1,\varphi_k\rangle+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda-\lambda_k}\int\limits_0^t\Big(\int\limits_0^{t-s}(1+q_k(\tau))d\tau\Big)\langle f(s,\bar{x}),\varphi_k\rangle\,ds\right]\varphi_k+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{\lambda_k=\lambda}\left[\langle f(t,\bar{x}),\varphi_k\rangle+\int\limits_0^t q(t-s)\,\langle f(s,\bar{x}),\varphi_k\rangle\,ds\right]\varphi_k,$$

где $q_k(t)$ — резольвента ядра $\frac{\lambda_k^2}{\lambda-\lambda_k}(-t+\int\limits_0^t(t-s)h(s)ds)$, $q(t)$ — резольвента ядра $h(t)$, $\{\varphi_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ те же, что и в теореме 3.

3. Полные интегро-дифференциальные уравнения второго порядка

По схеме пункта 1 можно исследовать задачу Коши для уравнения

$$B\ddot{u}(t)=A_1\dot{u}(t)+A_0u(t)+\int\limits_0^t g(t-s)A_0u(s)ds+f(t),\tag{6}$$

в котором B, A_1, $A_0 \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, B необратим, $g(t)$ достаточно гладкая при $t \geq 0$. Ключевым понятием в производимых исследованиях является конструкция фундаментальной оператор-функции, соответствующей интегро-дифференциальному уравнению (6), а именно, для оператора $B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) - A_0 g(t)\theta(t)$, которую построим в терминах теории полиномиально-ограниченных пучков операторов [8]. В начале в удобных для нас обозначениях приведем основные понятия этой теории.

Определение 4. *Операторный пучок $(\mu^2 B - \mu A_1 - A_0)$ называется полиномиально ограниченным (или B–ограниченным), если он непрерывно обратим вне некоторого круга радиуса a. Для B–ограниченного пучка будем предполагать выполненными условия:*

A) $\forall \Gamma \equiv \{\mu \in C : \ |\mu| = r > 0\}$

$$\oint_{\Gamma} R_{\mu}^{B}(A_1, A_0) d\mu = \oint_{\Gamma} (\mu^2 B - \mu A_1 - A_0)^{-1} d\mu \equiv \mathbb{O};$$

B) *операторы B и A_1 псевдокоммутируют относительно $R_{\mu}^{B}(A_1, A_0)$, т.е. $BR_{\mu}^{B}(A_1, A_0)A_1 \equiv A_1 R_{\mu}^{B}(A_1, A_0)B$, в этом случае две другие пары операторов B и A_0, A_1 и A_0 также псевдокоммутируют относительно $R_{\mu}^{B}(A_1, A_0)$.*

При выполнении условий **A)** и **B)** пара операторов

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \mu R_{\mu}^{B}(A_1, A_0) B d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \mu B R_{\mu}^{B}(A_1, A_0) d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2, порождая естественные разложения пространств $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = N(P) \oplus R(P)$, $E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = N(Q) \oplus R(Q)$. Действия операторов B, A_1, A_0 при этом расщепляются

$$B_0,\, A_1^0,\, A_0^0 : \ E_1^0 \to E_2^0, \quad B_1,\, A_1^1,\, A_0^1 : \ E_1^1 \to E_2^1,$$

причем A_0^0 и B_1 непрерывно обратимы, $QB = BP$, $QA_i = A_i P$, $i = 0, 1$.

Методом математическиой индукции доказываются следующие две леммы

Лемма 1. *Если выполнено условие* **A)**, *то семейства операторов*

$$K_0^1(t) = I\delta(t), \quad K_0^2(t) = I\delta(t),$$

$$K_1^1(t) = H_0(t) = (\delta(t) + r(t)\theta(t))(A_0^0)^{-1} B_0, \quad K_1^2(t) = -H_1(t) = -(\delta(t) + r(t)\theta(t))(A_0^0)^{-1} A_1^0,$$

$$K_{q+1}^1(t) = K_q^2(t) * H_0(t), \quad K_{q+1}^2(t) = K_q^1(t) - K_q^2(t) * H_1(t)$$

удовлетворяют равенствам

$$BK_q^2(t) - A_1 K_{q+1}^2(t) - (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_0 * K_{q+2}^2(t) \equiv \mathbb{O}, \ q = 0, 1, \ldots,$$

$$BK_q^1(t) - A_1 K_{q+1}^1(t) - (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_0 * K_{q+2}^1(t) \equiv \mathbb{O}, \ q = 1, 2, \ldots,$$

$$K_{q+k+2}^2(t) = K_{k+1}^1(t) * K_q^2(t) + K_{k+1}^2(t) * K_{q+1}^2(t), \ k, q = 0, 1, \ldots.$$

Лемма 2. *Если выполнено условие* **A)**, *то семейства операторов*

$$L_0^1(t) = I\delta(t), \quad L_0^2(t) = I\delta(t),$$

$$L_1^1(t) = S_0(t) = (\delta(t) + g(t)\theta(t))B_1^{-1}A_0^1, \quad L_1^2(t) = S_1\delta(t) = B_1^{-1}A_1^1\delta(t),$$
$$L_{q+1}^1(t) = L_q^2(t) * S_0(t), \quad L_{q+1}^2(t) = L_q^1(t) + L_q^2(t) * S_1\delta(t)$$

удовлетворяют равенствам

$$BL_{q+2}^2(t) - A_1L_{q+1}^2(t) - (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_0 * L_q^2(t) \equiv \mathbb{O}, \ q = 0, 1, \ldots,$$
$$BL_{q+2}^1(t) - A_1L_{q+1}^1(t) - (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_0 * L_q^1(t) \equiv \mathbb{O}, \ q = 1, 2, \ldots,$$
$$L_{q+k+2}^2(t) = L_{k+1}^1(t) * L_q^2(t) + L_{k+1}^2(t) * L_{q+1}^2(t), \ k, q = 0, 1, \ldots.$$

В этих леммах $r(t)$, как и выше, резольвента ядра $(-g(t))$.

Теорема 5. *Если операторный пучок $(\mu^2B - \mu A_1 - A_0)$ полиномиально B-ограничен, выполнены условия* **A)** *и* **B)**, *то интегро-дифференциальный оператор $(B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0(\delta(t) + g(t)\theta(t)))$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\theta(t) * L_k^2(t)B_1^{-1}Q - (\delta(t) + r(t)\theta(t)) * \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{(k)}(t) * K_k^2(t)(A_0^0)^{-1}(I - Q).$$

Доказательство. Проведем по обычной для таких утверждений схеме

$$(B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0(\delta(t) + g(t)\theta(t))) * \mathcal{E}(t) = BB_1^{-1}Q\delta(t) + \theta(t) * (BL_1^2(t) - A_1L_0^2(t))B_1^{-1}Q +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\theta(t) * (BL_{k+1}^2(t) - A_1L_k^2(t) - (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_0 * L_{k-1}^2(t))B_1^{-1}Q -$$
$$-(\delta(t) + r(t)\theta(t)) * \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{(k+2)}(t) * (BK_k^2(t) - A_1K_{k+1}^2(t) - (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_0 * K_{k+2}^2(t))(A_0^0)^{-1}(I - Q) +$$
$$+(\delta(t) + r(t)\theta(t)) * \delta'(t) * (A_1K_0^2(t) + (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_0 * K_1^2(t))(A_0^0)^{-1}(I - Q) +$$
$$+(\delta(t) + r(t)\theta(t)) * \delta(t) * (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_0 * K_0^2(t)(A_0^0)^{-1}(I - Q).$$

Но

$$BL_1^2(t) - A_1L_0^2(t) \equiv \mathbb{O},$$
$$A_1K_0^2(t) + (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_0 * K_1^2(t) \equiv \mathbb{O},$$
$$(\delta(t) + r(t)\theta(t)) * \delta(t) * (\delta(t) + g(t)\theta(t)) = \delta(t),$$

поэтому в силу лемм 1 и 2, получаем

$$(B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0(\delta(t) + g(t)\theta(t))) * \mathcal{E}(t) = Q\delta(t) + (I + Q)\delta(t) = I\delta(t).$$

С другой стороны

$$\mathcal{E}(t) * (B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0(\delta(t) + g(t)\theta(t))) = B_1^{-1}QB\delta(t) + \theta(t) * (L_1^2(t) - L_0^2(t)B_1^{-1}A_1^1)P +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\theta(t) * (L_{k+1}^2(t) - L_k^2(t)B_1^{-1}A_1^1 - L_{k-1}^2(t) * (\delta(t) + g(t)\theta(t))B_1^{-1}A_0^1)P -$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{(k+2)}(t) * (K_k^2(t) * H_0(t) - K_{k+1}^2(t) * H_1(t) - K_{k+2}^2(t))(I - P) +$$
$$+\delta'(t) * H_1(t)(I - P) + K_0^2(t)(I - P)\delta(t) + \delta'(t) * K_1^2(t)(I - P).$$

Поскольку

$$L_1^2(t) - L_0^2(t)B_1^{-1}A_1^1 \equiv \mathbb{O},$$

$$L_{k+1}^2(t) - L_k^2(t)B_1^{-1}A_1^1 - L_{k-1}^2(t) * (\delta(t) + g(t)\theta(t))B_1^{-1}A_0^1 =$$

$$= L_{k+1}^2(t) - L_k^2(t) * S_1\delta(t) - L_{k-1}^2(t) * S_0(t) = L_{k+1}^2(t) - L_k^2(t) * S_1\delta(t) - L_k^1(t) \equiv \mathbb{O},$$

$$K_k^2(t) * H_0(t) - K_{k+1}^2(t) * H_1(t) - K_{k+2}^2(t) = K_{k+1}^1(t) - K_{k+1}^2(t) * H_1(t) - K_{k+2}^2(t) \equiv \mathbb{O},$$

то

$$\mathcal{E}(t) * (B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0(\delta(t) + g(t)\theta(t))) = P\delta(t) + (I + P)\delta(t) = I\delta(t).$$

□

Работа проводилась при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 гг., госконтракт № П696 и гранта для поддержки НИР аспирантов и молодых сотрудников ИГУ, тема №091-08-104 (приказ №370 от 24.12.2010).

Литература

1. Фалалеев, М.В. Начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости / М.В. Фалалеев, С.С. Орлов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2010. – Т. 17, вып. 4. – С. 597 – 600.
2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
3. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47 – 74.
4. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
5. Фалалеев, М.В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности / М.В. Фалалеев, Е.Ю. Гражданцева // Дифференц. уравнения – 2006. – Т. 42, № 6. – С. 769 – 774.
6. Фалалеев, М.В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях секториальности и радиальности / М.В. Фалалеев // Известия вузов. Математика. – 2006. – № 10. – С. 68 – 75.
7. Cavalcanti, M.M. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping / M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira // Math. Meth. Appl. Sci. – 2001. – V. 24. – P. 1043 – 1053.
8. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислит. технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 45 – 54.

Михаил Валентинович Фалалеев, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Математический анализ и дифференциальные уравнения», Иркутский государственный университет, mihail@ic.isu.ru.

Сергей Сергеевич Орлов, аспирант, кафедра «Математический анализ и дифференциальныех уравненияй», Иркутский государственный университет, orlov_sergey@inbox.ru.

Поступила в редакцию 19 ноября 2010 г.