УДК 517.984.54

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

А.И. Седов

ABOUT THE INVERSE PROBLEM OF THE SPECTRAL ANALYSIS

A.I. Sedov

Приведены достаточные условия, налагаемые на последовательность комплексных чисел, для которой существует возмущенный оператор такой, что его спектр совпадает с данной последовательностью. Приводится алгоритм приближенного нахождения возмущающего оператора.

Ключевые слова: самосопряженный дискретный оператор, гильбертово пространство, оператор Лапласа, ядерный оператор, спектр, след, возмущение, собственные числа.

We give the sufficient conditions imposed on a sequence of complex numbers for which there exists such perturbation operator, that its spectrum is equal to the given sequence. The algorithm of the approximate finding of the perturbation operator is given.

Keywords: a self-adjoint discrete operator, Hilbert space, Laplace operator, an operator of trace class, spectrum, trace, perturbation, eigenvalues.

Введение

Пусть линейный, дискретный, самосопряженный, полуограниченный снизу оператор T с ядерной резольвентой действует в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Предположим, что спектр оператора $\sigma(T)$ простой, и занумеруем собственные числа оператора λ_n в порядке возрастания $n = \overline{1,\infty}$. Через v_n обозначим соответствующие λ_n ортонормированные в H собственные функции. Пусть P — ограниченный оператор умножения на функцию $p \in H$, действующий в H.

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа: *пусть ряд* $\sum\limits_n |\lambda_n - \xi_n|$ *сходится. Для последовательности* $\{\xi_n\}$ *требуется доказать существование и единственность такого оператора* $T + P$, *что его спектр* $\sigma(T + P) = \{\mu_n\}$ *совпадает с данной последовательностью* $\{\xi_n\}$.

В представленной работе развивается метод, впервые предложенный в [1], где для заданной последовательности доказано существование возмущенной степени оператора Лапласа на прямоугольной области. Метод можно применять и для обыкновенных дифференциальных операторов, но, в основном, его развивали для операторов в частных производных. Дальнейшие исследования велись в направлении уменьшения степени оператора Лапласа. Наибольшего прогресса удалось достичь в работе [2], где впервые решена задача для возмущенного оператора Лапласа. Следует отметить, что, в основном, рассматривались такие прямоугольные области на которых оператор Лапласа имеет простой спектр. Случай прямоугольной области с кратным спектром оператора был рассмотрен в [3]. В работе [4] была рассмотрена не прямоугольная область, и хотя это значительно увеличило объем вычислений, но не привнесло никаких принципиальных сложностей. В работе [5] впервые была решена обратная задача спектрального анализа для абстрактного дискретного оператора с ядерной резольвентой в гильбертовом пространстве. В работе [6] был представлен алгоритм вычисления приближенного решения для оператора Лапласа на прямоугольной области. Однако численная реализация представленного в ней алгоритма затруднена из-за большого объема вычислений.

В основе метода лежит теория возмущений. Одним из последних результатов [7] является формула регуляризованных следов для дискретного оператора T с ядерной резольвентой и ограниченным оператором P:

$$\sum_{n}[\lambda_n - \mu_n + (Pv_n, v_n)] = 0. \tag{1}$$

Обратные задачи, как правило, представляют большую сложность в исследовании, чем прямые задачи. В настоящей работе удалось приблизиться к ограничениям прямой задачи. Рассмотрен дискретный оператор, действующий в гильбертовом пространстве с ядерной резольвентой. Ослаблено условие малости, ранее налагаемое на возмущенный оператор. Кроме того, в настоящей работе приводится алгоритм, который был успешно реализован для возмущенной степени оператора Лапласа на прямоугольной области.

1. Оператор в гильбертовом пространстве

Введем следующие обозначения: $a_n = \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda = \dfrac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2}\}$, $r_n = \frac{1}{2}\min\{\lambda_{n+1}-\lambda_n; \lambda_n-\lambda_{n-1}\}$, $r_0 = \inf\limits_n r_n$, $\gamma_n = \{\lambda : |\lambda_n - \lambda| = r_0\}$, $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = \lambda_n + r_n\}$, $\Omega_n = \{\lambda : |\lambda_n - \lambda| \geq r_0\}$, $\Omega = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ — ядерная норма и норма Гильберта-Шмидта, $R_0(\lambda) = (T-\lambda E)^{-1}$, $R(\lambda) = (T+P-\lambda E)^{-1}$.

Лемма 1. *Если P ограниченный оператор такой, что $\|PR_0(\lambda)\| < 1$ при $\lambda \in \Omega$, то $T+P$ — дискретный. Причем, если $R_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, то $R(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, $1 \leq q < \infty$.*

Обозначим через μ_n собственные числа оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей, с учетом алгебраической кратности.

Лемма 2. *Если $\|P\| < r_0/2$, то для любого n внутри контуров γ_n будет находиться одинаковое число λ_n и μ_n.*

Лемма 3. *Если P — ограниченный, то существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что*
1) для любых $n \leq N$ все собственные числа λ_n и μ_n будут находиться внутри контура Γ_N,
2) для любых $n > N$ внутри контуров γ_n будут находиться ровно по одному λ_n и μ_n.

1.1. Оператор с ядерной резольвентой

Пусть P — ограниченный оператор, T — оператор с ядерной резольвентой.

Теорема 1. *Имеют место спектральные тождества:*

$$\mu_n = \lambda_n + (Pv_n, v_n) + \alpha_n(p), \quad n > N, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_n^q = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^q + \sum_{n=1}^{N} q\lambda_n^{q-1}(Pv_n, v_n) + \alpha_q(p), \quad q \leq N, \tag{3}$$

$\alpha_n(p) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \alpha_n^{(k)}(p)$, *где*

$$\alpha_q^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k q}{2\pi i k} \int_{\Gamma_N} \lambda^{q-1} \operatorname{Sp}\left[(PR_0(\lambda))^k\right] d\lambda, \quad q \le N,$$

$$\alpha_n^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k}{2\pi i k} \int_{\gamma_n} \operatorname{Sp}\left[(PR_0(\lambda))^k\right] d\lambda, \quad n > N.$$

Введем матрицу Вандермонда

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix},$$

и обозначим через w_{nq}^- элементы обратной матрицы W^{-1}.

Разложим v_n^2 в ряд $v_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{nk}\varphi_k$ по ортонормированному базису $\{\varphi_n\}$ подпространства $H_1 \subset H$. В частности, это может быть базис $\{v_n\}$. **Предположим,** что матрица C обратима, и обозначим через c_{nk}^- элементы обратной матрицы C^{-1}.

Теорема 2. *Пусть базис $\{\varphi_n\}$ равномерно ограничен. Если для последовательности $\{\xi_n\}$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что выполняются неравенства:*

$$\omega^2 := \frac{r^2}{\|1\|_{H_1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\max_{\lambda\in\Gamma_N} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \frac{1}{1 - r/r_N} \sum_{k=1}^{N} |c_{nk}^-| \sum_{q=1}^{N} |w_{kq}^-| r_N^q + \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_{nk}^-| \max_{\lambda\in\gamma_k} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \frac{r_k}{1 - r/r_k} \Big]^2 < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} c_{nk}^- \sum_{q=1}^{N} \frac{w_{kq}^-}{q} \sum_{s=1}^{N} (\xi_s^q - \lambda_s^q) + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{nk}^- (\xi_k - \lambda_k) \right|^2 \le r^2(1-\omega)^2, \tag{4}$$

ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \max_{\lambda\in\Gamma_N} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \frac{1}{1 - r/r_N} \sum_{k=1}^{N} c_{nk}^- \sum_{q=1}^{N} w_{kq}^- r_N^q + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{nk}^- \max_{\lambda\in\gamma_k} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \frac{r_k}{1 - r/r_k} \right|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} c_{nk}^- \sum_{q=1}^{N} \frac{w_{kq}^-}{q} \sum_{s=1}^{N} (\xi_s^q - \lambda_s^q) + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{nk}^- (\xi_k - \lambda_k) \right|,$$

сходятся, то в шаре $U(0,r) \in H$ существует оператор P такой, что спектр $\sigma(T+P) = \{\mu_n\}$ совпадает с последовательностью $\{\xi_n\}$.

1.2. Оператор с неядерной резольвентой

Пусть $\|P\| < \frac{r_0}{2}$, T — оператор с резольвентой Гильберта–Шмидта.

Построим функции $f_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такие, что $f_t(\lambda_k) = \delta_{tk}$, где δ_{tk} — символ Кронекера и пусть $\beta_t = \sup\limits_{\operatorname{Re}\lambda>0} (|\lambda|^2 \cdot |f_t(\lambda)|) < \infty$. Примером таких функций являются функции $f_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, которые в левой полуплоскости не имеют особых точек и ограничены по модулю, а в правой полуплоскости имеют вид:

$$f_t(\lambda) = A_t \left(\frac{e^{-\lambda} - 1}{\lambda} \right)^2 \left(\prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda} e^{-\lambda_k}) \right) \left(\prod_{k=1, k\neq t}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k + \lambda} \right),$$

где нормирующие множители A_t выбраны из условия $f_t(\lambda_t) = 1$, $t \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $f_t(\lambda_k) = \delta_{tk}$. Поскольку $f_t(\lambda_t) = 1$, то $\beta_t \geq \lambda_t^2$. Введем функции $g_t(\lambda) = \int_0^{\lambda} f_t(z)dz$.

Из последовательности $\{a_t\}_{t=1}^{\infty}$ выберем подпоследовательность $\{c_t\}_{t=1}^{\infty}$ так, чтобы $\forall t \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство $c_t > \lambda_t$.

Теорема 3. *Пусть базис $\{\varphi_n\}$ равномерно ограничен. Если для комплексной последовательности $\{\xi_n\}$ существует подпоследовательность $\{c_n\} \subset \{a_n\}$ такая, что выполняются следующие неравенства:*

$$\omega := \frac{r_0}{2\|1\|_{H_1}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}^-| \frac{\beta_k}{c_k} \max_{\lambda \in \Gamma_k} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 1,$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}^- \sum_{\lambda_j < c_k} (g_k(\xi_j) - g_k(\lambda_j)) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r_0}{2}(1 - \omega),$$

ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}^- \frac{\beta_k}{c_k} \max_{\lambda \in \Gamma_k} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \right|, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}^- \sum_{\lambda_j < c_k} (g_k(\xi_j) - g_k(\lambda_j)) \right|,$$

сходятся, то существует потенциал p, такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\lambda_j < c_t} g_t(\mu_j) = \sum_{\lambda_j < c_t} g_t(\xi_j).$$

Теорема 4. *Пусть базис $\{\varphi_n\}$ равномерно ограничен константой K. Если для комплексной последовательности $\{\xi_n\}$ существует подпоследовательность $\{c_n\} \subset \{a_n\}$ такая, что выполняются следующие неравенства:*

$$\omega := \frac{r_0 K}{2\|1\|_{H_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}^-| \frac{\beta_k}{c_k} \max_{\lambda \in \Gamma_k} \|R_0(\lambda)\|_2^2 < 1,$$

$$K \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}^- \sum_{\lambda_j < c_k} (g_k(\xi_j) - g_k(\lambda_j)) \right| < \frac{r_0}{2}(1 - \omega),$$

то существует потенциал p, такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\lambda_j < c_t} g_t(\mu_j) = \sum_{\lambda_j < c_t} g_t(\xi_j).$$

1.3. Алгоритм 1

Алгоритм напишем для случая, когда T имеет ядерную резольвенту, а P — ограниченный.

Приближенное решение будем находить методом последовательных приближений.

Задаем точность δ.

1. Выбираем $m \in \mathbb{N}$.
2. Положим $p_0 \equiv 0$.
3. $p_1 = \alpha_0 - \alpha(p_0) = \alpha_0$.

$$\alpha_0 = \sum_{n=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{N} c_{nk}^{-} \sum_{q=1}^{N} \frac{w_{kq}^{-}}{q} \sum_{s=1}^{N} (\xi_s^q - \lambda_s^q) + \sum_{k=N+1}^{m} c_{nk}^{-} (\xi_k - \lambda_k) \right] \varphi_n, \tag{5}$$

4. Вычисляем $p_{j+1} = \alpha_0 - \alpha(p_j)$, $j = 1, 2, \ldots$.

$$\alpha(p) = \sum_{n=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{N} c_{nk}^{-} \sum_{q=1}^{N} \frac{w_{kq}^{-}}{q} \alpha_q(p) + \sum_{k=N+1}^{m} c_{nk}^{-} \alpha_k(p) \right] \varphi_n, \tag{6}$$

$$\alpha_n(p) = \sum_{k=2}^{m} \tilde{\alpha}_n^{(k)}(p), \quad n = \overline{1, m}, \ m \geq N, \tag{7}$$

$$\tilde{\alpha}_q^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k q}{2\pi i k} \int_{\Gamma_N} \lambda^{q-1} \sum_{j=1}^{m} \Big((PR_0(\lambda))^k v_j, v_j \Big) \, d\lambda, \quad q \leq N, \tag{8}$$

$$\tilde{\alpha}_n^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k}{2\pi i k} \int_{\gamma_n} \sum_{j=1}^{m} \Big((PR_0(\lambda))^k v_j, v_j \Big) \, d\lambda, \quad n > N. \tag{9}$$

5. По формулам (2)–(3), где α_n вычисляются по формулам (7)–(9), вычисляем μ_n, $n > N$ и $\sum\limits_{n=1}^{N} \mu_n^q$, $q \leq N$.

6. Сравниваем числа μ_n, полученные в п.5 с числами ξ_n, $n > N$ и $\sum\limits_{n=1}^{N} \mu_n^q$ с $\sum\limits_{n=1}^{N} \xi_n^q$, $q \leq N$ соответственно, по какому-либо критерию, например, наименьших квадратов.

7. Если значение критерия уменьшилось по сравнению с предыдущим, то переходим к следующей итерации, т.е. к п.4. Если значение увеличилось, и необходимая точность была достигнута на предыдущей итерации, то приближенное решение $\tilde{p} = p_{j+1}$ найдено. Если значение увеличилось, но необходимая точность не была достигнута на предыдущей итерации, то переходим к п.1, увеличивая m.

Теорема 5. *$p_m \to p$ при $m \to \infty$.*

2. Оператор Лапласа

2.1. Кратный спектр

Пусть $\Pi_n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ 0 \leq x_j \leq a_j, j = 1, \ldots, n\}$, $a_j > 0$. В пространстве $L_2(\Pi_n)$ рассмотрим оператор Лапласа T_0, порожденный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial \Pi_n} = 0, \quad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Введем оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы, $\beta \geq \dfrac{n}{2}$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Собственным числам $\lambda_m = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\pi^2 m_j^2}{a_j^2}\right)^\beta$ оператора T соответствуют ортонормированные в $L_2(\Pi_n)$ собственные функции $v_m(x) = \sqrt{\dfrac{2^n}{V}}\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi m_j x_j}{a_j}\right)$, где m — мультииндекс $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $V = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} a_j$. Иногда, для удобства будем нумеровать упорядоченные по возрастанию собственные числа $\lambda_m = \lambda_{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ оператора T и связанные с ними спектральные объекты одним нижним натуральным индексом и одним верхним, при этом верхний индекс будет обозначать кратность ν_t собственного числа λ_t, т.е. $\lambda_t = \lambda_t^k = \lambda_t^j$, $k = \overline{1, \nu_j}$.

Обозначим $s_2^2 = \displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} r_t^2 \max_{\lambda\in\gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^4$

Теорема 6. *Пусть* $\beta > \dfrac{3n}{2}$, $r < \min\{r_0, \dfrac{1}{s_2\sqrt{2^n}}\}$, $\omega = \sqrt{2^n} s_2 r$. *Если для комплексной последовательности* $\{\xi_t^k\}$ *выполняется неравенство:*

$$\sqrt{2^n V}\left(\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu_t}|\xi_t^k - \lambda_t|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2}(1-\omega),$$

то существует потенциал $p \in L_2(\Pi_n)$, *такой, что для любого* $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu_t} \mu_t^k, \tag{10}$$

где $\sigma(T + P) = \{\mu_t^k\}$, *причем*

$p(a_1 - x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1, a_2 - x_2, \ldots, x_n) = \ldots = p(x_1, x_2, \ldots, a_n - x_n) = = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

для почти всех $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Pi_n$,

$$(p, \varphi_m) = 0, \quad \text{при} \prod_{j=1}^{n} m_j = 0,\ m_j = 0, 1, \ldots, \qquad \|p\|_{L_2} \leq \frac{r}{2}.$$

Замечание 1. В рассмотренных раннее операторах с простым спектром, кратный спектр учитывается аналогичным способом. Тождества совпадения спектров записываются аналогично полученному здесь равенству (10).

Теорема 7. *Если спектр оператора T простой, то оператор P, найденный в теоремах 2 и 6 единственный.*

2.2. Алгоритм 2

Алгоритм запишем для случая, когда для всех n существуют непересекающиеся окружности γ_n содержащие внутри себя только λ_n и ξ_n.

Задаем точность δ.

1. Выбираем m. Число выбираем произвольно, чем оно больше, тем точнее будет найдено приближенное решение. Если количество ξ_n конечно, то m определяется естественным образом.

2. Положим $p_0 \equiv 0$.
3. $p_1 = \alpha_0 - \alpha(p_0) = \alpha_0$,

$$\alpha_0 = \sum_{n=1}^{m} (\xi_n - \lambda_n)\varphi_n.$$

4. Вычисляем $p_{j+1} = \alpha_0 - \alpha(p_j)$, $j = 1, 2, \ldots$ по формулам:

$$\alpha(p) = \sum_{n=1}^{m} \Big(\alpha_n^2(p) + \alpha_n^3(p) + \alpha_n^4(p)\Big)\varphi_n,$$

$$\alpha_n^2(p) = -\sum_{i \neq n} \frac{V_{in}^2}{\lambda_i - \lambda_n}, \quad \text{где} \quad V_{ni} = (Pv_n, v_i),$$

$$\alpha_n^3(p) = \sum_{i,j \neq n} \frac{V_{ni}V_{ij}V_{jn}}{(\lambda_i - \lambda_n)(\lambda_j - \lambda_n)} - \sum_{i \neq n} \frac{V_{ni}^2 V_{nn}}{(\lambda_i - \lambda_n)^2},$$

$$\alpha_n^4(p) = -\sum_{i,j,k \neq n} \frac{V_{ni}V_{ij}V_{jk}V_{kn}}{(\lambda_i - \lambda_n)(\lambda_j - \lambda_n)(\lambda_k - \lambda_n)} + \sum_{i,j \neq n} \frac{V_{nn}V_{ni}V_{ij}V_{jn}}{(\lambda_i - \lambda_n)(\lambda_j - \lambda_n)^2} +$$

$$\sum_{i,j \neq n} \frac{V_{nn}V_{ni}V_{ij}V_{jn}}{(\lambda_i - \lambda_n)^2(\lambda_j - \lambda_n)} + \sum_{i,j \neq n} \frac{V_{ni}^2 V_{jn}^2}{(\lambda_i - \lambda_n)^2(\lambda_j - \lambda_n)} - \sum_{i \neq n} \frac{V_{nn}^2 V_{ni}^2}{(\lambda_i - \lambda_n)^3}.$$

5. Вычисляем μ_n, $n = \overline{1, m}$:

$$\mu_n = \lambda_n + V_{nn} + \alpha_n^2(p) + \alpha_n^3(p) + \alpha_n^4(p).$$

6. Сравниваем числа полученные, в п.5, с числами ξ_n по какому-либо критерию, например, наименьших квадратов:

$$MNK = \sum_{n=1}^{m} |\xi_n - \mu_n|^2 < \delta^2.$$

7. Если значение критерия уменьшилось по сравнению с предыдущим, то переходим к следующей итерации, т.е. к п.4. Если значение увеличилось, и необходимая точность была достигнута на предыдущей итерации, то приближенное решение $\tilde{p} = p_{j+1}$ найдено. Если значение увеличилось, но необходимая точность не была достигнута на предыдущей итерации, то переходим к п.1, увеличивая m.

Замечание 2. Обоснование возможности приближенного вычисления собственных чисел по формуле п.5 дано в работе [8].

2.3. Пример

Пусть П — прямоугольник со сторонами a и b, $\dfrac{a^2}{b^2}$ — иррациональное. Рассмотрим самосопряженный неотрицательный оператор T_0, порожденный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Введем оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_0, $\beta > 3/2$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Известно, что собственным числам $\lambda_{kl} = \left(\frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\pi^2 l^2}{b^2}\right)^\beta$ оператора T соответствуют ортонормированные в $L_2(\Pi)$ собственные функции $v_{kl}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{\pi k x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi l y}{b}\right)$; $k, l \in \mathbb{N}$.

Поскольку a^2/b^2 иррациональное число, то спектр $\sigma(T)$ оператора T однократный. Для удобства будем нумеровать упорядоченные по возрастанию собственные числа и связанные с ними спектральные объекты одним натуральным индексом.

Обозначим $\Pi_4 = \{(x,y)|\quad 0 \le x \le \frac{a}{2},\quad 0 \le y \le \frac{b}{2}\}$ — вспомогательный прямоугольник и введем полную ортонормированную в $L_2(\Pi_4)$ систему функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\varphi_n(x,y) = \varphi_{kl}(x,y) = \frac{4}{\sqrt{ab}} \cos\frac{2\pi k x}{a} \cos\frac{2\pi l y}{b}$, где $\lambda_n = \left(\frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\pi^2 l^2}{b^2}\right)^\beta$, $k, l \in \mathbb{N}$.

Приведем пример реализации алгоритма для случая: стороны прямоугольника $a = \sqrt[4]{2}$ и $b = 1$; степень $\beta = 2$. Положим $m = 9$. Тогда будем иметь

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_9, \ldots\} =$$

$$= \{28,76,\ 144,66,\ 218,68,\ 460,19,\ 535,21,\ 929,99,\ 1060,11,\ 1380,87,\ 2329,73, \ldots\}.$$

Здесь и далее вычисления производись с помощью математического пакета Maple 6 с точностью до 30 значащих цифр, но для экономии места приведены только две. В качестве возмущенной последовательности возьмем

$$\{\xi_1, \ldots, \xi_9\} = \{-14,70,\ 118,56,\ 189,90,\ 449,10,\ 511,75,\ 903,62,\ 1051,98,\ 1372,41,\ 2324,44\}.$$

Последовательное вычисление функций p_j и вычисленные по ним значения критерия равны $MNK_1 = 1,473321$, $MNK_2 = 0,007982$, $MNK_3 = 0,000075$. Таким образом, полученная после третьей итерации функция

$$p_3(x,y) =$$

$$-177,59\cos(5,28x)\cos(6,28y) - 105,16\cos(10,56x)\cos(6,28y) - 116,70\cos(5,28x)\cos(12,57y) - 44,36\cos(10,57x)\cos(12,57y) - 91,65\cos(15,85x)\cos(6,28y) - 105,39\cos(5,28x)\cos(18,85y) - 30,93\cos(15,85x)\cos(12,57y) - 33,09\cos(10,57x)\cos(18,85y) - 19,70\cos(15,85x)\cos(18,85y)$$

дает множество $\{\mu_1, \ldots, \mu_9\}$ которое мало отличается от множества $\{\xi_1, \ldots, \xi_9\}$.

Литература

1. Дубровский, В.В. К обратной задаче для оператора Лапласа с непрерывным потенциалом / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравн. – 1990. – Т. 26, № 9. – С. 1563 – 1567.

2. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для одного дифференциального оператора в частных производных с неядерной резольвентой / А.И. Седов, В.В. Дубровский (мл.) // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2005. – Т. 10, № 1–2. – С. 1 – 8. – ISSN 1560-4128.

3. Седов, А.И. О существовании и единственности решения обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа на параллелепипеде / А.И. Седов, Г.А. Закирова // Вестн. МаГУ. Математика. – 2006. – вып. 9. – С. 145 – 149. – ISBN 5-86781-315-0.

4. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике / А.И. Седов, Г.А. Закирова // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 2. – С. 34 – 42. – ISSN 1810-5378.
5. Седов, А.И. О существовании решения одной задачи теории управления / А.И. Седов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, вып. 6. – С. 1120. – ISSN 0869-8325.
6. Седов, А.И. О приближенном решении обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа / А.И. Седов // Вестн. ЮУрГУ, сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2010. – № 16(192), вып. 5. – С. 73 – 78. — ISSN 2071-0216.
7. Садовничий, В.А. Регуляризованный след ограниченного возмущения оператора с ядерной резольвентой / В.А. Садовничий, В.Е. Подольский // Дифференц. уравн. – 1999. – Т. 35, № 4. – С. 556 – 564.
8. Вычисление первых собственных чисел дискретного оператора / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т.3, № 2. – С. 6 – 8.

Седов Андрей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Математические методы в экономике», Магнитогорский государственный университет, sedov-ai@yandex.ru.

Поступила в редакцию 27 ноября 2010 г.