УДК 517.917+517.925

# СВЯЗЬ ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ С УСТОЙЧИВОСТЬЮ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Г.А. Рудых, Д.Я. Киселевич*

# RELATIONSHIP OF LIOUVILLE'S THEOREM TO THE STABILITY OF MOTION OF NONLINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

***G.A. Rudykh, D.J. Kiselevich***

В работе изучается связь теоремы Лиувилля для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с устойчивостью движения по Ляпунову. Получен дивергентный критерий отсутствия притяжения (аттрактора) для нелинейной системы ОДУ. Введены в рассмотрение и оценены снизу функции, характеризующие локальную расходимость и неограниченную сгущаемость траекторий неавтономной системы ОДУ.

*Ключевые слова: ансамбль Гиббса, теорема Лиувилля, система обыкновенных дифференциальных уравнений, оператор сдвига, гомеоморфизм, устойчивость по Ляпунову.*

In this paper we study the connection between the Liouville theorem for a nonautonomous system of ordinary differential equations with a resistance movement of Lyapunov. A divergence criterion for the absence of attraction for nonlinear systems of ordinary differential equations is obtained. The functions characterizing the divergence of local and unlimited condensability of trajectories of nonautonomous systems of ordinary differential equations are introduced and evaluated from the bottom.

*Keywords: Gibbs ensemble, Liouville's theorem, the system of ordinary differential equations, the shift operator, homeomorphism, Lyapunov stability.*

## Введение

В работе рассматривается теорема Лиувилля [1] для нелинейной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{x} = X(x,t), \quad x(t)\Big|_{t=t_0} = x_0, \tag{1.1}$$

и ее связь с устойчивостью движения (1.1) по Ляпунову. Здесь $x$, $X(x,t)$ – векторы из $\mathbb{R}^n$; $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – открытое множество; $G = \Omega \times I$; $I = \{t : t_0 \le t < +\infty\}$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, являющаяся проекцией $G$ в $R^n$; $X(x,t) \in C^1(G \to \mathbb{R}^n)$.

В дальнейшем относительно системы ОДУ (1.1) будем использовать два предположения. Будем говорить, что для системы ОДУ (1.1) выполняется предположение **A**, если $X_i(x,t) \in C^{(1,1)}_{xt}(G)$, решения последней продолжимы до бесконечности и остаются в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$

при их продолжении как вправо, так и влево по $t$. Будем говорить, что для системы ОДУ (1.1) выполняется предположение **B**, если все ее решения с начальными условиями $x_0 \in \Omega_{t_0} \subset \Omega$ не стремятся к границе $\partial\Omega$ области $\Omega$ при $t \to \infty$, где $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ – компактное множество положительной меры Лебега $mes\Omega_{t_0} > 0$.

Введем ряд обозначений, используемых ниже: $\rho(x, z)$ – расстояние между элементами $x, z \in \mathbb{R}^n$; $\chi(x,t) = \nabla \cdot X(x,t)$ – дивергенция векторного поля $X(x,t)$ системы ОДУ (1.1); $\chi(x(x_0,t_0,t),t) = \nabla \cdot X(x,t)\Big|_{x=x(x_0,t_0,t)}$ – дивергенция векторного поля $X(x,t)$, вычисленная вдоль ее решения $x = x(x_0,t_0,t)$; $\Omega_t = \{x(x_0,t_0,t) = T(t,t_0)x_0 : x_0 \in \Omega_{t_0}\}$ – множество переменной структуры из $\mathbb{R}^n$; $T(t,t_0)$ – оператор сдвига [2] вдоль траекторий системы ОДУ (1.1); $mes\Omega_t$ - мера Лебега множества $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$; $D(x(x_0,t_0,t),t) = det\left\|\frac{\partial x(x_0,t_0,t)}{\partial x_0}\right\|$ – якобиан отображения $x_0 \to x(x_0,t_0,t)$; $S(x,t) = det\left\|\frac{\partial x_0(x,t,t_0)}{\partial x}\right\|$ – якобиан отображения $x(x_0,t_0,t) \to x_0$.

# 1. Теорема Лиувилля для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

В дальнейшем систему ОДУ (1.1) будем трактовать как закон движения изображающей точки $x$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Ансамблем Гиббса назовем множество идентичных систем вида (1.1) с одинаковыми правыми частями и отличающимися друг от друга лишь начальными состояниями. Итак, если систему ОДУ (1.1) трактовать как закон движения изображающей точки $x$ в $\mathbb{R}^n$, то ансамблю Гиббса системы (1.1) будет соответствовать в $\mathbb{R}^n$ ансамбль изображающих точек. Пусть $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ – компактное множество положительной меры Лебега $mes\Omega_{t_0} > 0$, занимаемое ансамблем изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в начальный момент времени $t = t_0$. Каждая из изображающих точек $x_0 \in \Omega_{t_0}$, двигаясь по траекториям системы ОДУ (1.1), переместится за время от $t_0$ до $t$ в новое состояние $x(x_0,t_0,t) = T(t,t_0)x_0 \in \Omega_t \subset \Omega$, где $T(t,t_0)$ – оператор сдвига [2] по траекториям системы ОДУ (1.1); $\Omega_t$ – образ множества $\Omega_{t_0}$ в силу системы ОДУ (1.1); $\Omega_t = T(t,t_0)\Omega_{t_0}$.

**Определение 1.** *Множество переменной структуры $\Omega_t \subset \Omega$ назовем равномерно стягивающимся к точке $x^* \in \Omega$, если*

$$\sup_{x\in\Omega_t} \rho(x^*, x) \to 0.$$

**Определение 2.** *Отображение $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назовем непрерывным в точке $z \in D$ относительно множества $D$, если для любой $\varepsilon$-окрестности $K(x,\varepsilon)$ точки $x = Fz$ существует $\delta$-окрестность $K(z,\delta)$ точки $z$ такая, что для всех точек, принадлежащих множеству $K(z,\delta) \cap D$ справедливо включение*

$$F(K(z,\delta) \cap D) \subset K(x,\varepsilon).$$

Ниже будем использовать уравнение Лиувилля (уравнение неразрывности) [3]

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = Lf(x,t), \quad f(x,t)|_{t=t_0} = f_0(x), \tag{1.2}$$

соответствующее системе ОДУ (1.1) и выражающее закон сохранения ансамбля изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1). Здесь

$$L\cdot = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[X_i(x,t)\cdot] = -\nabla \cdot [X(x,t)\cdot] \tag{1.3}$$

– оператор Лиувилля, действующий по формуле $L : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$; $f_0(x) = f(x, t_0)$ – функция, удовлетворяющая условиям

$$f_0(x) \geq 0, \quad f_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)dx = 1.$$

При этом $f_0(x)$ трактуется как начальная функция плотности распределения ансамбля изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в множестве $\Omega_{t_0}$. Текущее значение функции плотности распределения $f(x,t)$ определяется из задачи Коши (1.2)и характеризует состояние ансамбля изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в образе $\Omega_t$ множества $\Omega_{t_0}$. Уравнение Лиувилля (1.2) с учетом (1.3) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}f(x,t) = -\chi(x,t)f(x,t), \quad f(x,t)|_{t=t_0} = f_0(x), \tag{1.2$'$}$$

где $\frac{d}{dt}f(x,t)$ – полная производная в силу системы ОДУ (1.1). Из уравнения Лиувилля (1.2)' следует зависимость

$$\frac{d}{dt}D(x(x_0,t_0,t),t) = \chi(x(x_0,t_0,t),t)D(x(x_0,t_0,t),t), \quad D(x(x_0,t_0,t),t)|_{t=t_0} = 1. \tag{1.4}$$

**Теорема 1.** *Пусть для системы ОДУ (1.1) выполняется предположение* **A**. *Пусть $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ – компактное множество положительной меры Лебега $mes\Omega_{t_0} > 0$, занимаемое ансамблем изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в начальный момент времени $t = t_0$. Пусть каждая из изображающих точек $x_0 \in \Omega_{t_0}$, двигаясь по траекториям системы ОДУ (1.1), переместится за время от $t_0$ до $t$ в новое состояние $x(x_0,t_0,t) = T(t,t_0)x_0 \in \Omega_t$. Пусть $\Omega_t = \{x(x_0,t_0,t) = T(t,t_0)x_0 : x_0 \in \Omega_{t_0}\}$ – образ множества $\Omega_{t_0}$ в силу системы ОДУ (1.1). Тогда оператор сдвига $T(t,t_0)$ по траекториям системы ОДУ (1.1) определяет гомеоморфизм множества $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ в множество $\Omega_t = T(t,t_0)\Omega_{t_0}$. Кроме того, $\Omega_t \subset \Omega$ является компактным множеством положительной меры Лебега $mes\Omega_t > 0$ и обладает свойствами*

$$mes\Omega_t = \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega_t}\chi(x,\tau)dxd\tau + mes\Omega_{t_0}, \tag{1.5}$$

$$\lim_{\Omega_t \to x^*}\frac{d}{dt}\ln mes\Omega_t = \chi(x^*,t). \tag{1.6}$$

*Доказательство.* Так как для системы ОДУ (1.1) выполняется предположение **A**, то решения $x(t) = x(x_0,t_0,t)$ последней являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями класса $C^2$ по $t$ и класса $C^1$ по $x_0, t_0$. Тогда отображение $T(t,t_0) : \Omega_{t_0} \to \Omega_t$, осуществляемое оператором сдвига $T(t,t_0)$ по траекториям $x(t) = x(x_0,t_0,t)$ системы ОДУ (1.1), является взаимно однозначным, причем $T(t,t_0)x_0 \in C^1$ по совокупности $x_0,t_0,t$ для любой точки $x_0 \in \Omega_{t_0}$ и $t \in I$. При этом $\Omega_t = \left\{T(t,t_0)x_0 : x_0 \in \Omega_{t_0}\right\} = T(t,t_0)\Omega_{t_0}$ – множество, занимаемое ансамблем изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в текущий момент времени $t \in I$. Поэтому отображение $T(t,t_0) : \Omega_{t_0} \to \Omega_t$, задаваемое соотношениями $x(t) = x(x_0,t_0,t)$ дифференцируемо, а, следовательно, и непрерывно в любой точке $x^* \in \Omega_{t_0}$. Причем линейный ограниченный оператор $V = \left\| \frac{\partial x(x_0,t_0,t)}{\partial x_0}\Big|_{x_0=x_*} \right\|$, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ является производной Фреше нелинейного оператора $T(t,t_0)$ в точке $x^* \in \Omega_{t_0}$ [2, 5]. Далее, так как непрерывный образ компакта есть компакт, то из компактности $\Omega_{t_0} \subset \Omega$

*следует компактность* $\Omega_t \subset \Omega$. Из непрерывности и взаимной однозначности отображения $T(t,t_0) : \Omega_{t_0} \to \Omega_t$ следует, что оператор сдвига $T(t,t_0)$ определяет гомеоморфизм множества $\Omega_{t_0}$ в множество$\Omega_t$. Причем, в силу того, что отображение, осуществляемое оператором сдвига $T(t,t_0) : \Omega_{t_0} \to \Omega_t$ непрерывно дифференцируемо и $D(x(x_0,t_0,t),t) \neq 0$, то для любой точки $x \in \Omega_t$ существует единственное непрерывно дифференцируемое обратное отображение $x_0 = T^{-1}(t,t_0)x$, якобиан которого $S(x,t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}S(x,t) = LS(x,t), \quad S(x,t)\Big|_{t=t_0} = 1.$$

Теперь рассмотрим обратное отображение $T^{-1}(t,t_0) : \Omega_t \to \Omega_{t_0}$. Покажем, что $T^{-1}(t,t_0)$ является непрерывным отображением в произвольной точке $\bar{x} \in \Omega_t$ относительно $\Omega_t$. Иначе для любой $\varepsilon$-окрестности $K(\bar{x}_0,\varepsilon)$ точки $\bar{x}_0 = T^{-1}(t,t_0)\bar{x}$ существует $\delta$-окрестность $K(\bar{x},\delta)$ точки $\bar{x}$ такая, что для всех точек $x \in K(\bar{x},\delta) \cap \Omega_t$ выполняется соотношение $T^{-1}(t,t_0) \in K(\bar{x}_0,\varepsilon)$. Поскольку любое замкнутое подмножество компакта есть компакт, то множество $\Omega_{t_0}\backslash K(\bar{x}_0,\varepsilon)$ замкнуто, а следовательно, компактно. Поэтому в силу непрерывности отображения $T(t,t_0)$ подмножество $D = T(\Omega_{t_0}\backslash K(\bar{x}_0,\varepsilon)) \subset \Omega_t$ является компактным, а значит и замкнутым подмножеством множества $\Omega_t$. С другой стороны, так как отображение $T(t,t_0)$ взаимно однозначно, то точка $\bar{x} \notin D$. Поэтому существует $\delta$-окрестность $K(\bar{x},\delta)$ точки $\bar{x}$, в которой не содержится ни одной точки из множества $D$. Но тогда множество $T^{-1}(K(\bar{x},\delta)\cap\Omega_t)$ не содержит ни одной точки из $T^{-1}D$, т.е. из множества $\Omega_{t_0}\backslash K(\bar{x}_0,\varepsilon)$. Тем самым справедливо включение

$$T^{-1}(K(\bar{x},\delta)\cap\Omega_t) \subset K(\bar{x}_0,\varepsilon).$$

Иначе для всех $x \in K(\bar{x},\delta)\cap\Omega_t$ имеет место соотношение $T^{-1}(t,t_0)x \in K(\bar{x}_0,\varepsilon)$. Наконец, в силу произвола выбора точки $\bar{x} \in \Omega_t$ следует непрерывность отображения $T^{-1}(t,t_0)$ на множестве $\Omega_t$. Итак, оператор сдвига $T(t,t_0)$, удовлетворяющий соотношению $\Omega_t = T(t,t_0)\Omega_{t_0}$ определяет гомеоморфизм множества $\Omega_{t_0} \subset \mathbb{R}^n$ в множество $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$. Таким образом, $T(t,t_0)$ – биективное отображение и $T(t,t_0)$,$T^{-1}(t,t_0)$ - непрерывные отображения.

Теперь покажем справедливость формул (1.5), (1.6). Тот факт, что множество $\Omega_t = T(t,t_0)\Omega_{t_0}$ обладает положительной мерой Лебега, $mes\Omega_t > 0$ следует из цепочки равенств

$$mes\Omega_t = \int\limits_{\Omega_t} dx = \int\limits_{\Omega_{t_0}} D(x(x_0,t_0,t),t)dx_0 = \int\limits_{\Omega_{t_0}} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(x_0,t_0,\tau),\tau)d\tau\right)dx_0. \tag{1.7}$$

Очевидно, что выражение (1.7) приводит к зависимости

$$\frac{d}{dt}mes\Omega_t = \int\limits_{\Omega_t} \chi(x,t)dx. \tag{1.8}$$

Интегрируя соотношение (1.8) по переменной $t$ в пределах от $t_0$ до $t$ и учитывая, что $(mes\Omega_t)|_{t=t_0} = mes\Omega_{t_0}$, приходим к формуле (1.5). Доказательство предельного равенства (1.6) очевидно, если учесть, что соотношение (1.8) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d}{dt}\ln mes\Omega_t = \frac{\int\limits_{\Omega_t} \chi(x,t)dx}{\int\limits_{\Omega_t} dx}. \tag{1.9}$$

□

Ниже будем использовать выражение

$$mes\Omega_t = (mes\Omega_{t_0}) \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(x_0, t_0, \tau), \tau) d\tau\right), \tag{1.10}$$

справедливость которого следует из (1.7) и интегральной теоремы о среднем, где $x_0$ - некоторая точка из компакта $\Omega_{t_0}$.

## 2. Дивергентный критерий отсутствия притяжения (аттрактора) для неавтономной системы ОДУ

**Определение 3.** *Систему ОДУ (1.1), обладающую в области $G = \Omega \times I$ положительно (отрицательно) определенной дивергенцией $\chi(x,t) \geq a(x) > 0$ ($\chi(x,t) \leq -b(x) < 0$), назовем расширяющейся (сжимающейся), если $\chi(x,t) \leq 0$, то нерасширяющейся.*

**Определение 4.** *Систему ОДУ (1.1) назовем непритягивающейся на множестве $\Omega_{t_0} \subset \Omega$, если выполняется следующая логическая цепочка*

$$(\forall x_0 \in \Omega_{t_0} \subset \Omega) \;\; (\exists \varepsilon > 0) \;\; (\forall \delta > \varepsilon) \;\; (\exists \tilde{x}_0 \in \Omega) :$$

$$((\rho(x_0, \tilde{x}_0) < \delta) \Rightarrow (\exists \tau \geq t_0)(\forall t \geq \tau) \;\; (\rho(x(t), \tilde{x}(t)) > \varepsilon).$$

Ясно, что сколь угодно сильная подверженность задачи Коши (1.1) малым возмущениям ее начального состояния $x_0 \in \Omega_{t_0}$, является более сильным свойством, чем неустойчивость ее траекторий по Ляпунову [6]. Действительно, в определении 4 речь идет о неограниченном возрастании расстояния между состояниями системы ОДУ (1.1) на возмущенной и невозмущенной траекториях.

**Теорема 2.** *Для того, чтобы система ОДУ (1.1) была непритягивающейся на множестве $\Omega_{t_0} \subset \Omega$, достаточно, чтобы последняя принадлежала классу расширяющихся систем и для нее выполнялись предположения* **A** *и* **B**.

*Доказательство.* Итак, для системы ОДУ (1.1) выполняется цепочка неравенств $\nabla \cdot X(x,t) = \chi(x,t) \geq a(x) > 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ из условия, чтобы $\varepsilon$-окрестность $S^*(x_0)$ траектории $x(t) = x(x_0, t_0, t)$ целиком лежала в области $\Omega$, т.е. имеет место строгое включение $S^* \subset \Omega$. Существование $\varepsilon$-окрестности $S^*(x_0)$ и числа $\varepsilon > 0$ вытекает из предположения **B**. Далее, пусть $S(x_0, \delta_0/2) = \{\tilde{x}_0 : \rho(x_0, \tilde{x}_0) \leq \delta_0/2\}$ – максимальный замкнутый шар с центром в точке $x_0$, радиуса $\delta_0/2$ и такой, что $S \subset \Omega_{t_0}$. Тогда для шара $S$ и его образа $\tilde{S} = T(t, t_0)S$ в силу формулы (1.10) выполняется соотношение

$$mes\tilde{S} \geq (mesS) \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(x_0, t_0, \tau), \tau) d\tau\right) - \varepsilon/4,$$

где $x(x_0, t_0, t)$ – решение системы ОДУ (1.1); $S = S(x_0, \delta_0/2)$; $\delta_0 > 0$ – число, не превосходящее заданного $\delta > 0$. Причем образ $\tilde{S}$ шара $S$ при отображении $\tilde{S} = T(t, t_0)S$ как было показано выше, является компактным множеством при любом фиксированном $t \in I$. Кроме того, для образа $\tilde{S}$ шара $S$ справедлива оценка

$$mes\tilde{S} \leq (d(\tilde{S}))^n,$$

где
$$d(\tilde{S}) = \sup_{x',x''\in\tilde{S}} \rho(x',x'') = \rho(\bar{x},\bar{\bar{x}})$$
– диаметр множества $\tilde{S} \subset \Omega$; $\bar{x},\bar{\bar{x}} \in \partial\tilde{S}$. В силу предположения **A** решение задачи Коши (1.1) существует, единственно и непрерывно зависит от начальных состояний $x_0 \in \Omega_{t_0}$. Следовательно, существует единственная функция $\chi(x(x_0,t_0,t),t)$. При этом отображение $x(x_0,t_0,t) = T(t,t_0)x_0$ непрерывно, взаимно однозначно и имеет непрерывное обратное отображение $T^{-1}(t,t_0)$. Далее, так как $\bar{x} = T(t,t_0)\bar{x}_0$, $\bar{\bar{x}} = T(t,t_0)\bar{\bar{x}}_0$ и $\rho(\bar{x}_0,\bar{\bar{x}}_0) \le \delta_0 < \delta$, то из соотношений $\bar{x}_0 = T^{-1}(t,t_0)\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}_0 = T^{-1}(t,t_0)\bar{\bar{x}}$ следует, что $\bar{x}_0$, $\bar{\bar{x}}_0 \in \partial S$, где $S = S(x_0,\delta_0/2)$ – замкнутый шар. С другой стороны, известно, что мера Лебега (объем) $n$-мерного шара $S$ диаметра $\partial(S)$ определяется формулой
$$mes S = c_n(d(S))^n, \quad c_n = \frac{(2^{1-n}\pi^{n/2})}{n\Gamma(n/2)}, \tag{2.1}$$
где $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ - гамма-функция. Таким образом, имеет место цепочка неравенств
$$d(\tilde{S}) \ge (mes\tilde{S})^{1/n} \ge (c_n)^{1/n}\cdot d(S)\cdot \exp\left(n^{-1}\int\limits_{t_0}^{t}\chi(\tau)d\tau\right) - \varepsilon/4 =$$
$$= (c_n)^{1/n} \sup_{x_0,\tilde{x}_0\in S} \rho(x_0,\tilde{x}_0)\cdot \exp\left(n^{-1}\int\limits_{t_0}^{t}\chi(\tau)d\tau\right) - \varepsilon/4 \ge$$
$$\ge (c_n)^{1/n}\rho(x_0,\tilde{x}_0)\cdot \exp\left(n^{-1}\int\limits_{t_0}^{t}\chi(\tau)d\tau\right) - \varepsilon/4 \ge$$
$$(c_n)^{1/n}\rho(x_0,\tilde{x}_0)\cdot \exp\left(n^{-1}(t-t_0)\inf_{x\in S^*} a(x)\right) - \varepsilon/4.$$
Далее, так как $\inf\limits_{x\in S^*} a(x) > 0$, то существует по крайней мере две точки $x(t),\tilde{x}(t) \in \tilde{S}$ такие, что выполняется неравенство
$$\rho(x(t),\tilde{x}(t)) \ge (c_n)^{1/n}\rho(x_0,\tilde{x}_0)\exp(a_*(t-t_0)/n) - \varepsilon/4,$$
где $a_* = \inf\limits_{x\in S^*} a(x)$. □

## 3. Функции, характеризующие локальную расходимость и неограниченную сгущаемость траекторий неавтономной системы ОДУ

Теперь введем в рассмотрение и оценим снизу функции $\alpha(x(x_0,t_0,t),t)$, $\beta(x(x_0,t_0,t),t)$, характеризующие соответственно локальную расходимость и неограниченную сгущаемость траекторий системы ОДУ (1.1).

Итак, пусть $\tilde{S} = T(t,t_0)S(\tilde{x}_0,\delta_0/2)$ – образ замкнутого шара $S(\tilde{x}_0,\delta_0/2) = \{x_0 : \rho(x_0,\tilde{x}_0) \le \delta_0/2\}$, где $\delta_0 = d(S)$; $S \subset \Omega_{t_0} \subset \Omega$. Предположим, что $\delta_t = d(\tilde{S})$. Теперь введем в рассмотрение функцию
$$\alpha(x(x_0,t_0,t),t) = \lim_{\delta_0\to 0}\delta_t/\delta_0, \tag{3.1}$$

характеризующую локальную расходимость ансамбля траекторий Гиббса системы ОДУ (1.1), выходящих из окрестности точки $\tilde{x}_0 \in \Omega_{t_0}$. Очевидно, что чем больше $\alpha(x(x_0,t_0,t),t)$, тем сильнее расходятся траектории из ансамбля. Оценим снизу функцию $\alpha(x(x_0,t_0,t),t)$. Согласно формуле (1.10) имеем

$$mes\tilde{S} = mesS(\tilde{x}_0, \delta_0/2) \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(x_0,t_0,\tau),\tau)d\tau\right).$$

Принимая во внимание тот факт, что $mes\tilde{S} \leq (\delta_t)^n$, получим следующую оценку снизу функции (4.1)

$$\alpha(x(x_0,t_0,t),t) \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} B_n \cdot \exp\left(\frac{1}{n}\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(x_0,t_0,\tau),\tau)d\tau\right), \tag{3.2}$$

где $B_n = [2/n\Gamma(n/2)]^{1/n}$. Таким образом, если $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(x_0,t_0,\tau),\tau)d\tau = \infty$, то из формулы (3.2) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(x(x_0,t_0,t),t) = \infty$.

С другой стороны, пусть $S(\tilde{x},\varepsilon_t/2) = \{x : \rho(x,\tilde{x}) \leq \varepsilon_t/2\} \subset \Omega_t$ – замкнутый шар с центром в произвольной точке $\tilde{x} \in \Omega_t \subset \Omega$ диаметра $d(S(\tilde{x},\varepsilon_t/2)) = \varepsilon_t$. Тогда для каждой точки $x \in S(\tilde{x},\varepsilon_t/2)$ существует единственная точка $x_0 = T^{-1}(t,t_0)x \in \Omega_{t_0}$, где $T^{-1}(t,t_0) : x \to x(x_0,t_0,t)$; $t \in I$. Пусть $S$ – образ шара $S(\tilde{x},\varepsilon_t/2)$ при отображении $S = T^{-1}S(\tilde{x},\varepsilon_t/2)$, причем $d(S) = \varepsilon_0$, $d(S(\tilde{x},\varepsilon_t/2)) = \varepsilon_t$. Введем в рассмотрение функцию

$$\beta(x(x_0,t_0,t),t) = \lim_{\varepsilon_t\to 0} \varepsilon_0/\varepsilon_t, \tag{3.3}$$

которая характеризует, как сильно к текущему моменту времени $t \in I$ сгущаются (сближаются) между собой траектории системы ОДУ (1.1), берущие начало в окрестности точки $\tilde{x}_0 \in \Omega_{t_0}$. Иначе говоря, функция (3.3) характеризует сгущаемость ансамбля траекторий Гиббса системы ОДУ (1.1). Далее, из соотношения $S = T^{-1}S(\tilde{x},\varepsilon_t/2)$ и формулы (1.10) следует зависимость

$$mesS = mesS(\tilde{x},\varepsilon_t/2) \cdot \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(x_0,t_0,\tau),\tau)d\tau\right),$$

где $x_0$ – некоторая точка из множества $S$. Так как $(\varepsilon_0)^n \geq mesS$, т.е. $\varepsilon_0 \geq (mesS)^{1/n}$, то с учетом формулы (2.1) получим, что

$$\varepsilon_0 \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} B_n \varepsilon_t \cdot \exp\left(-\frac{1}{n}\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(x_0,t_0,\tau),\tau)d\tau\right),$$

где $B_n = [2/n\Gamma(n/2)]^{1/n}$. Тем самым, для функции (3.3) имеет место следующая оценка снизу

$$\beta(x(x_0,t_0,t),t) \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} B_n \cdot \exp\left(-\frac{1}{n}\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(x_0,t_0,\tau),\tau)d\tau\right). \tag{3.4}$$

Кроме того, если $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\chi(x(x_0,t_0,\tau),\tau)d\tau = -\infty$, то из формулы (3.4) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(x(x_0,t_0,t),t) = +\infty$. Итак, функция

$$L(t,x_0,t_0) = \int\limits_{t_0}^{t}\chi(x(x_0,t_0,\tau)\tau)d\tau, \tag{3.5}$$

характеризует как локальную расходимость, когда $\lim\limits_{t\to\infty} L(t,x_0,t_0) = \infty$, так и неограниченную сгущаемость, когда $\lim\limits_{t\to\infty} L(t,x_0,t_0) = -\infty$, траекторий системы ОДУ (1.1).

# 4. Пример, связанный с оценкой снизу функции сгущаемости траекторий

Рассмотрим движение космического летательного аппарата с неработающим двигателем (пассивный спуск) на основном участке траектории входа в атмосферу планеты [7, 8]. Основной участок траектории входа в атмосферу планеты характерен тем, что именно на нем аэродинамические нагрузки и интенсивность теплопередачи достигают своих максимальных значений. В работе [7]показано, что при определенных предположениях система ОДУ, описывающая плоское движение космического летательного аппарата на основном участке траектории входа в атмосферу планеты, имеет вид

$$\frac{dh}{dv} = -f(h,v)\theta, \quad f(h,v) = \left[\frac{c_x s\rho_0}{2m}ve^{-\lambda h}\right]^{-1},$$
$$v\frac{d\theta}{dv} = -\frac{c_y}{c_x} + \frac{g - v^2/r}{v}f(h,v). \tag{4.1}$$

Здесь $v = v(t)$ – скорость аппарата в текущий момент времени $t$; $h$ – высота аппарата над поверхностью планеты; $\theta$ – угол наклона траектории аппарата к плоскости местного горизонта; $\rho_0$ – плотность атмосферы планеты на высоте $h = 0$; $r$ – радиус планеты; $m$ – масса аппарата; $g$ – ускорение силы тяжести; $s$ – характерная площадь аппарата; $c_x$ – коэффициент лобового сопротивления; $c_y$ – коэффициент подъемной силы; $\lambda$ – логарифмический градиент плотности атмосферы.

Введем в рассмотрение новое независимое переменное $u(t) = v(t_0) - v(t)$, где $v(t_0) = v_0$ – скорость аппарата в начальный момент времени $t = t_0$. Тогда исследуемая система ОДУ (4.1) принимает вид

$$\frac{dh}{du} = f(h,u)\theta, \quad f(h,u) = \left[\frac{c_x s\rho_0}{2m}(v_0 - u)e^{-\lambda h}\right]^{-1},$$
$$(v_0 - u)\frac{d\theta}{du} = \frac{c_y}{c_x} - \frac{g - (v_0 - u)^2/r}{v_0 - u}f(h,u), \tag{4.2}$$

где $u(t) = v(t_0) - v(t)$ – монотонно возрастающая по времени $t$ функция; $u(t_0) = u_0 = 0$; $0 \le u < v_0 - v$; $v_0 = v(t_0)$. Пусть $h(u_0) = h_0$, $\theta(u_0) = \theta_0$ – начальные условия для системы ОДУ (4.2). Тогда истинные (фактические) траектории космического летательного аппарата на основном участке входа в атмосферу планеты могут отличаться от модельных (расчетных) в силу ряда причин. Анализ этих причин приводит к задаче о локальной расходимости, рассеивании траекторий системы ОДУ (4.2). Одна из причин локальной расходимости траекторий системы ОДУ (4.2) заключается в сколь угодно сильной подверженности модели (4.2) малым возмущениям ее начальных состояний $h_0, \theta_0$.

Теперь с помощью формулы (3.4) оценим снизу функцию сгущаемости (3.3) траектории системы ОДУ (4.2) с начальными условиями $h(0) = h_0$, $\theta(0) = \theta_0$. С этой целью вычислим функцию (3.5) для системы ОДУ (4.2). Итак, из (4.2) следует, что справедлива цепочка равенств

$$L(u, h_0, \theta_0, 0) = \lambda \int_0^{v_0 - v} f(h(u), u)\theta(u)du = \lambda \int_0^u dh(\tau) = \lambda[h(u, h_0, \theta_0) - h_0] =$$
$$= -\lambda[h_0 - h(u, h_0, \theta_0)], \tag{4.3}$$

где $h_0$ – начальная высота входа в атмосферу планеты; $h(u) = h(u, h_0, \theta_0)$ – высота, соответствующая текущему значению независимой переменной $u$. Так как $\lambda > 0$ и $h_0 - h(u, h_0, \theta_0) > 0$, то из формулы (4.3) следует, что $L(u, h_0, \theta_0, 0) < 0$. Тем самым, из соотношений (3.3), (3.4) следует, что сам факт снижения на основном участке траектории космического летательного аппарата в атмосферу планеты оказывает стабилизирующий эффект. Действительно, в этом случае уменьшаются возмущения траекторий системы ОДУ (4.2), связанные с возмущениями ее начальных состояний $h_0, \theta_0$. Причем из формулы (4.3) следует, что данный стабилизирующий эффект тем больше, чем больше логарифмический градиент плотности атмосферы $\lambda > 0$ и перепад высот $h_0 - h(u, h_0, \theta_0) > 0$.

Настоящая работа дополняет исследования, проведенные в [9].

## Литература


1. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1985.
2. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966.
3. Steeb, W.H. Generalized Lioville equation, entropy, and dynamic systems containing limit cycles / W.H. Steeb // Physica A. – 1979. – V. 95, № 1. – P. 181 – 190.
4. Рудых, Г.А. Свойства интегральной кривой и решения неавтономной системы дифференциальных уравнений / Г.А. Рудых // Функции Ляпунова и их применения. – Новосибирск, 1987. – С. 189 – 190.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.
6. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967.
7. Ярошевский, В.А. Приближенный расчет траектории входа в атмосферу. I / В.А. Ярошевский // Космические исследования. – 1964. – Т. 2, № 4. – С. 507 – 531.
8. Ярошевский, В.А. Приближенный расчет траектории входа в атмосферу. II / В.А. Ярошевский // Космические исследования. – 1964. – Т. 2, № 5. – С. 679 – 697.
9. Рудых, Г.А. Связь теоремы Лиувилля для неавтономной системы дифференциальных уравнений с устойчивостью движения / Г.А. Рудых // Метод функций Ляпунова и его приложения. – Новосибирск, 1984. – С. 157 – 170.


Геннадий Алексеевич Рудых, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Математического анализа и дифференциальных уравнений», Иркутский государственный университет.

Дарья Яковлевна Киселевич, аспирант, кафедра «Математического анализа и дифференциальных уравнений», Иркутский государственный университет, dariakis@mail.ru.

*Поступила в редакцию 15 ноября 2010 г.*