УДК 517.9

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ХОФФА НА ГРАФЕ. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

П.О. Пивоварова

THE INSTABILITY OF THE SOLUTIONS OF THE HOFF EQUATIONS ON A GRAPH. NUMERICAL EXPERIMENT

P.O. Pivovarova

Целью статьи является численное исследование неустойчивости нулевого решения уравнения Хоффа, заданного на конечном связном ориентированном графе.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, численное моделирование, неустойчивость.

The goal of the paper is the numerical investigation of instability of the zero solution of the Hoff equation, given on a finite connected directed graph.

Keywords: Sobolev type equation, numerical simulation, instability.

Уравнение Хоффа [1]

$$(\lambda - \lambda_0)u_t + u_{txx} = \alpha u + \beta u^3 \tag{1}$$

моделирует выпучивание двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой. Функция $u = u(x,t)$, $(x,t) \in (a,b) \times \mathbb{R}$, характеризует отклонение балки от положения $u = 0$; параметры $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ характеризуют нагрузку и свойства материала балки соответственно. Начально-краевые задачи для уравнения (1) в области $(a,b) \times \mathbb{R}$ впервые были изучены Н.А. Сидоровым [2] и его учениками [3, 4], причем в [3, 4] был отмечен феномен несуществования решения этих задач при произвольных начальных данных. Изучение множества начальных значений, обеспечивающих существование и единственность решения начально-краевой задачи, было показано в [5]. В [6] показано, что это множество, понимаемое как фазовое пространство уравнения (1), является простым банаховым C^∞-многообразием, если $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$. В [7] показано, что если $\alpha\beta \in \mathbb{R}_-$, то фазовое пространство уравнения (1) уже не будет простым многообразием, – оно лежит на сборке Уитни.

Динамику конструкции из двутавровых балок моделируют уравнения Хоффа

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j + \beta u_j^3, \tag{2}$$

заданные на конечном связном ориентированном графе $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер, причем каждое ребро E_j имеет длину $l_j \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$. В вершинах $\mathfrak{V}$ графа $\mathbf{G}$ заданы условия

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \quad E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i), \tag{3}$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{4}$$

где через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине V_i, $t \in \mathbb{R}$. Условия (3), (4) обсуждаются, например, в [8]. Нас интересует устойчивость (по Ляпунову) стационарного решения $u = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ задачи (2) – (4) (см., например, [8]). В [8] было проведено исследование данной задачи при $\lambda \in [0, \lambda_0]$. В результате сформулирована

Теорема 1. *(i) При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in [0, \lambda_0)$ решение $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ задачи (2) – (4) асимптотически устойчиво.*
(ii) При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda = \lambda_0$ решение $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ задачи (2) – (4) устойчиво.

Целью данной статьи является проведение численного эксперимента по исследованию неустойчивости стационарного решения $u = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ задачи (2) – (4) в случае, когда $\lambda > \lambda_0$.

Численный эксперимент

На основе теоретических результатов для подтверждения гипотезы о неустойчивости нулевого решения уравнений Хоффа в системе компьютерной математики Maple 13.0. разработана программа, которая позволяет:

1. По заданным коэффициентам $\alpha, \beta, \lambda, \lambda_0$ находить приближенное решение для уравнения Хоффа.

2. Получить графическое изображение, которое иллюстрирует неустойчивость нулевого решения при $\lambda > \lambda_0$.

Для реализации вычислительных алгоритмов программы использовались встроенные функции и стандартные операторы языка программирования Maple 13.0. Для получения графического изображения подключен пакет plots.

Решение задачи (2) – (4) будем искать в виде суммы

$$u(t) = \sum_{k=1}^{m} \delta(t)\varphi_k, \; m \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

где $\{\varphi_k\}$ – ортонормированное в смысле $L_2(\mathbf{G})$ множество собственных функций оператора Штурма – Лиувилля на графе $\mathbf{G}$.

Поскольку обнаружена первая собственная функция оператора Штурма – Лиувилля на графе $\mathbf{G}$

$$\varphi_1 = \left(\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j l_j \right)^{-\frac{1}{2}} (1, 1, \dots, 1, \dots),$$

при $\lambda > \lambda_0$ можно записать первое приближение решения (2)

$$u(t) = \delta(t)\varphi_1.$$

Подставим его в (2) и получим уравнение

$$(\lambda - \lambda_0)\dot{\delta}(t) = \alpha\delta(t) + \beta\delta^3(t). \tag{6}$$

Легко посчитать, что $\delta(t) = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{-\beta + e^{-\frac{2\alpha t}{\lambda - \lambda_0}} C\alpha}}$, где $C = \text{const}$.

Поскольку нам необходимо провести исследование устойчивости решения (6) в окрестности точки нуль, будем выбирать те постоянные C, для которых $|\delta(t)| < \varepsilon$. Например, $C(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\beta}{\alpha} + \varepsilon$.

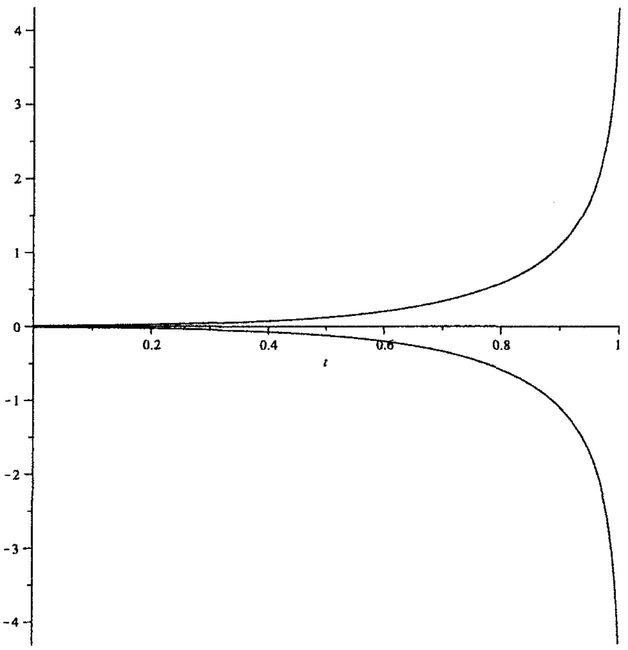
Пример 1. *Требуется найти численное решение задачи (2) – (4) при заданных коэффициентах $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\lambda = 6$, $\lambda_0 = 5$ в окрестности (-0,01, 0,01).*

Результаты приближенного решения задачи (2) – (4) частично приведены в таблице и проиллюстрированы на рисунке.

Таблица

Численное решение уравнения (6) при различных значениях параметров t и C

t	$C = 10001,41$	$C = 10002,41$	$C = 10003,41$
0,1	±0,016486946	±0,016486122	±0,016485298
0,2	±0,027184919	±0,027183559	±0,027182200
0,3	±0,044831741	±0,044829499	±0,044827256
0,4	±0,073966153	±0,073962447	±0,073958742
0,5	±0,122179501	±0,122173357	±0,122167214
0,6	±0,202481359	±0,202471071	±0,202460784
0,7	±0,338640683	±0,338622979	±0,338605277
0,8	±0,581719955	±0,581686939	±0,581653929
0,9	±1,094828649	±1,094747682	±1,094666732
1,012	±19,18107065	±19,04055057	±18,90307561



Решения уравнений (6)
при $C = 10002,41$, $C = 10003,41$, $C = 10004,41$, $C = 10005,41$, $C = 10006,41$

Замечание 1. Численный эксперимент, проведенный в данной работе, позволяет сделать вывод о неустойчивости нулевого решения задачи (2) – (4) при $\lambda > \lambda_0$. Поскольку ранее получен результат о устойчивости нулевого решения данной задачи при $\lambda \in [0, \lambda_0]$, можно сделать вывод о том что, параметр λ_0 выступает здесь как предельная нагрузка, при которой конструкция еще устойчива.

Литература

1. Hoff, N.J. Creep buckling / N.J. Hoff // Aeron. – 1956.– V. 7, № 1. – P. 1 – 20.
2. Сидоров, Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н.А. Сидоров. – Иркутск, 1982.
3. Сидоров, Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений / Н.А. Сидоров, О.А. Романова // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 1516 – 1526.
4. Сидоров, Н.А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 4. – С. 726 – 728.
5. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192 – 207.
6. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Мат. заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292 – 297.
7. Свиридюк, Г.А. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринеева // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 54 – 60.
8. Свиридюк, Г.А. Устойчивость уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. Вып. 1(20) – С. 6 – 15.

Полина Олеговна Пивоварова, кафедра «Общая математика», Южно-Уральский государственный университет, pelageia@bk.ru.

Поступила в редакцию 4 ноября 2010 г.