УДК 517.988.67

О РЕШЕНИЯХ МАКСИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЕКТОРИАЛЬНОЙ ОКРЕСТНОСТИ НУЛЯ

Р.Ю. Леонтьев

ON MAXIMUM INFINITESIMAL ORDER SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS IN SECTORIAL NEIGHBOURHOOD OF ZERO

R.Y. Leontyev

Рассматривается нелинейное уравнение $B(\lambda)x = R(x,\lambda)+b(\lambda)$, причем $R(0,0) \equiv 0$, $b(0) = 0$. Оператор $B(\lambda)$ не является непрерывно обратимым при $\lambda = 0$, однако имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, где S – некоторое множество, именуемое секториальной окрестностью нуля. Исследуются вопросы существования малых непрерывных решений $x(\lambda) \to 0$ при $S \ni \lambda \to 0$. Доказаные теоремы предоставляют конструктивный способ построения решения максимального порядка малости.

Ключевые слова: секториальная окрестность, нелинейное уравнение, теорема о неявном операторе, решение максимального порядка малости.

A nonlinear operator equation $B(\lambda)x = R(x,\lambda) + b(\lambda)$ with conditions $R(0,0) \equiv 0$, $b(0) = 0$ is considered. The linear operator $B(\lambda)$ hasn't a continuous inverse operator at $\lambda = 0$, but it has a bounded inverse operator when $\lambda \in S$, where S is a set named a sectorial neighbourhood of zero. The question of existence of infinitesimal continuous solutions $x(\lambda) \to 0$ at $\lambda \in S$ when $\lambda \to 0$. The proved theorems propose a constructive way the solution of the maximum infinitesimal order.

Keywords: an implicit function theorem, a nonlinear operator equation, a sectorial neighbourhood, a maximum infinitesimal order solution.

Пусть X, Y – банаховы пространства, Λ – линейное нормированное пространство. В работе рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$B(\lambda)x = R(x,\lambda) + b(\lambda), \tag{1}$$

где $B(\lambda)$ – замкнутый линейный оператор с плотной в банаховом пространстве X областью определения, не зависящей от параметра λ. Нелинейный оператор $R(x,\lambda)$ непрерывен по x и λ в окрестности точки (0,0), $R(0,0) = 0$. Фунция $b(\lambda)$ со значениями в Y непрерывна в нуле, $b(0) = 0$.

Будем полагать, что

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ при } S \ni \lambda \to 0, \tag{2}$$

где $a(\lambda)$ положительный функционал, непрерывный в окрестности нуля, $a(0) = 0$; $S \subset \Lambda$ – открытое множество, границе которого принадлежит точка $\lambda = 0$. Далее множество S будем называть *секториальной окрестностью нуля.*

Требуется построить малое решение $x(\lambda) \to 0$ при $S \ni \lambda \to 0$ уравнения (1) максимального порядка малости или («минимальную ветвь») малого решения.

Впервые теорема о существовании и построении в нерегулярных случаях ветвей решений нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях были доказаны в 2004 году в работе [1]. Ряд результатов о решениях максимального порядка малости изложен в работах [2, 3].

В этой работе, следуя методу работ [2, 3], искомая минимальная ветвь решений тоже строится в секториальной окрестности особой точки (в частности, точки ветвления решений) методом последовательных приближений в условиях, отличных от условий работ [1 – 3]. Теоремы этой работы уточняют результаты теоремы 1 в работах [2, 3] и применимы в некоторых случаях к более широкому классу уравнений.

Оценка (2) занимает особое место в данной работе, поэтому следует отметить, что подобная оценка может встретиться в прикладных задачах:

Пример 1. Пусть $X = Y = H$, B_0 – самосопряженный неотрицательный оператор, B_1 – самосопряженный положительный оператор, то есть

$$(B_0x, x) \geq 0, \quad (B_1x, x) \geq \gamma(x, x); \quad \forall x \in H.$$

Тогда

$$\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{\gamma a(\lambda)}\right).$$

Пример 2. Если элементы $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $k = \overline{1, p_i}$, $i = \overline{1, n}$ образуют полный B_1 – жорданов набор фредгольмова оператора B_0 и $p = \max\limits_{i=\overline{1,n}} p_i$, тогда в некоторой области $a(\lambda) < \varepsilon$ существует ограниченный обратный оператор $(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}$, и выполнена оценка

$$\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{(a(\lambda))^p}\right).$$

Приступим к исследованию уравнения (1), после чего сформулируем теорему 1.

Поскольку в области S оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный, то, используя замену $x = \nu(\lambda)y$, где $\nu(\lambda)$ некоторый непрерывный функционал λ, приведем уравнение (1) к эквивалентному виду:

$$y = \frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda)[R(\nu(\lambda)y, \lambda) + b(\lambda)].$$

Обозначим оператор в правой части последнего выражения через $\Phi(y, \lambda)$. Тогда наше уравнение примет вид

$$y = \Phi(y, \lambda). \tag{3}$$

Выясним условия, при которых оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжатием; поскольку от оператора $R(x, \lambda)$ существенно зависит поведение решений, а в нашем случае конкретный вид оператора $R(x, \lambda)$ неизвестен, то наложим следующее условие: пусть в шаре $\|x\| \leq \rho$, $\rho > 0$, выполнено неравенство

$$\|R(d(\lambda)x_1, \lambda) - R(d(\lambda)x_2, \lambda)\| \leq C \cdot d^l(\lambda) \cdot \rho \|x_1 - x_2\|,$$

где $l > 1$, $d(\lambda)$ – функционал, непрерывный в окрестности нуля, $d(0) = 0$, $C = const$, $C > 0$.

Тогда, учитывая, что мы производим оценку в окрестности нуля $\|y\| \leq r$, имеем:

$$\|\Phi(y_1, \lambda) - \Phi(y_2, \lambda)\| \leq \|C \cdot B^{-1}(\lambda) \cdot \nu^{l-1}(\lambda)\| \cdot r \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Выберем $\nu(\lambda) = O(a^{1/(l-1)}(\lambda))$. Тогда $\|C \cdot B^{-1}(\lambda) \cdot \nu^{l-1}(\lambda)\| \leq C_1$, где $C_1 > 0$ – *const*. Фиксируем $0 < q < 1$ и выбираем радиус шара $r_0 \leq r$, в котором мы исследуем уравнение (3), так, чтобы

$$r_0 = \min\left\{\frac{q}{C_1}, r\right\}.$$

Получим, что оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжатием в шаре $\|y\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S$ с коэффициентом сжатия q.

Следующим шагом убедимся, что значения оператора $\Phi(y, \lambda)$ не выходят из шаров радиуса r_0 для всех элементов y таких, что $\|y\| \leq r_0$. Учитывая, что оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжатием, получаем:

$$\|\Phi(y, \lambda)\| \leq \|\Phi(y, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq q r_0 + \|\frac{1}{\nu(\lambda)} B^{-1}(\lambda) b(\lambda)\|.$$

Так как $\nu(\lambda) = O(a^{1/(l-1)}(\lambda))$, $\|B^{-1}(\lambda)\| = O(1/a(\lambda))$, то второе слагаемое в последнем выражении будет сколь угодно малой величиной при $S \ni \lambda \to 0$, если $\|b(\lambda)\| = o(a^{l/(l-1)}(\lambda))$. То есть, если $\|b(\lambda)\| = o(a^{l/(l-1)}(\lambda))$, то существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\forall \lambda \in S_0$, $\forall y : \|y\| \leq r_0$ будет выполнено неравенство

$$\|\Phi(y, \lambda)\| \leq q r_0 + (1 - q) r_0 = r_0$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть в секториальной окрестности нуля S для уравнения (1) выполнено условие (2) и пусть:*
1. существует непрерывная функция $\nu(\lambda) : S \to R^+$, $\nu(0) = 0$ такая, что в шаре $\|x\| \leq r$ при $\lambda \in S$ выполнено неравенство

$$\|R(\nu(\lambda) x_1, \lambda) - R(\nu(\lambda) x_2, \lambda)\| \leq C \cdot \nu^l(\lambda) \cdot r \|x_1 - x_2\|,$$

где $l > 1$, $C > 0$ – постоянная;
2. имеет место оценка $\|b(\lambda)\| = o(a^{\frac{l}{l-1}}(\lambda))$.

Тогда в некоторой окрестности нуля $\|x\| \leq r_0 \leq r$ для $\forall\ \lambda \in S_0 \subset S$ существует малое решение уравнения (1) $x = x^*(\lambda)$, которое является минимальной ветвью из всех малых решений уравнения (1). Это решение можно найти по формуле $x = a^{\frac{1}{l-1}}(\lambda) y$, где y является пределом последовательности

$$y_n = \left(\frac{1}{a(\lambda)}\right)^{1/(l-1)} \cdot B^{-1}(\lambda) \Big[R(a^{\frac{1}{l-1}}(\lambda)\ y_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)\Big],\ y_0 = 0.$$

Все остальные малые решения уравнения (1) имеют при $S \in \lambda \to 0$ порядок малости не выше, чем $a^{\frac{1}{l-1}}(\lambda)$.

Необходимо отметить, что в данной теореме не требуется условие существования производной Фреше оператора $R(x, \lambda)$, однако, если такая производная существует и является непрерывной по x и λ в окрестности нуля, то получаем слудующую теорему:

Теорема 2. *Пусть для уравнения (1) в секториальной окрестности нуля S имеет место оценка (2) и пусть:*
1. существует непрерывная в нуле производная Фреше по первому аргументу нелинейного оператора $R(x, \lambda)$, и имеет место оценка

$$\|R_x(x, \lambda)\| = O(\|x\|^l) \text{ при } \|x\| \to 0, l > 0;$$

2. имеет место оценка $\|b(\lambda)\| = o(a^{\frac{l}{l-1}}(\lambda))$.

Тогда в некоторой окрестности нуля $\|x\| \le r_0 \le r$ *для* $\forall\ \lambda \in S_0 \subset S$ *существует малое решение уравнения (1)* $x = x^*(\lambda)$, *которое является минимальной ветвью из всех малых решений. Это решение можно найти по формуле* $x = a^{\frac{1}{l}}(\lambda)y$, *где* y *является пределом последовательности*

$$y_n = \left(\frac{1}{a(\lambda)}\right)^{1/l} \cdot B^{-1}(\lambda)\Big[R(a^{\frac{1}{l}}(\lambda)\ y_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)\Big],\ y_0 = 0.$$

Все остальные малые решения уравнения (1) имеют порядок не выше, чем $a^{\frac{1}{l}}(\lambda)$.

Доказательство. Аналогично, как в теореме 1 уравнение (1) приведем к виду (3). Для этого воспользуемся обратимостью оператора $B^{-1}(\lambda)$ в области S и заменой $x = \nu(\lambda)y$, где параметр $\nu(\lambda)$ – непрерывный функционал λ, условия на который будут получены исходя из условий принципа сжимающих отображений. Применяя оценку нормы произведения, интегральную теорему Лагранжа и используя первое условие теоремы 2, получим цепочку неравенств:

$$\|\Phi(y_1,\lambda) - \Phi(y_2,\lambda)\| = \|\frac{1}{\nu(\lambda)}B^{-1}(\lambda)[R(\nu(\lambda)y_1,\lambda) - R(\nu(\lambda)y_2,\lambda)]\| \le$$

$$\le \|\frac{1}{\nu(\lambda)}B^{-1}(\lambda)\| \cdot \|\int_0^1 R_x(\nu(\lambda)(y_2 + \Theta(y_1 - y_2)),\lambda)\,d\Theta \cdot \nu(\lambda)(y_1 - y_2)\| \le$$

$$\le \|\frac{1}{\nu(\lambda)}B^{-1}(\lambda)\| \cdot \int_0^1 \|R_x(\nu(\lambda)(y_2 + \Theta(y_1 - y_2)),\lambda)\|\,d\Theta \cdot \nu(\lambda)\|y_1 - y_2\| \le$$

$$\le \|B^{-1}(\lambda)\| \cdot \int_0^1 C|\nu(\lambda)|^l\|y_2 + \Theta(y_1 - y_2)\|^l\,d\Theta \cdot \|y_1 - y_2\| \le$$

$$\le C\|B^{-1}(\lambda)\| \cdot |\nu(\lambda)|^l \int_0^1 [\|y_1\| + \Theta(\|y_1\| + \|y_2\|)]^l\,d\Theta\|y_1 - y_2\|.$$

Здесь C – некоторая константа, которая неизбежно возникает в процессе оценки, но она не влияет на дальнейшие рассуждения. Выберем в качестве $\nu(\lambda)$ любое выражение, удовлетворяющее условию $\nu(\lambda) = O(a^{1/l}(\lambda))$ при $\lambda \to 0$. Кроме того, используем условие, что все оценки производятся в шаре $\|y\| \le r$. Получим, что:

$$\|\Phi(y_1,\lambda) - \Phi(y_2,\lambda)\| \le C_1 \cdot r^l \int_0^1 [1 + 2\Theta]^l\,d\Theta\|y_1 - y_2\|.$$

Константа C_1 появилась после сокращения выражений $\|B^{-1}(\lambda)\|$ и $|\nu(\lambda)|^l$, которые после введения условия на $\nu(\lambda)$ в виде оценки, зависящей от $a(\lambda)$ стали иметь порядки $O(1/a(\lambda))$ и $O(a(\lambda))$ соответственно. После вычисления интеграла, получаем:

$$\|\Phi(y_1,\lambda) - \Phi(y_2,\lambda)\| \le C_1 \cdot r^l \frac{1}{2(l+1)}\|y_1 - y_2\|.$$

Теперь, пусть $0 < q < 1$ фиксированное, выберем $r_0 = \min\{r, (2q(l+1)/(C_1 r^{l-1})\}$. Тогда оператор $\Phi(y, \lambda)$ является сжимающим в шаре $\|y\| \leq r_0$ при $\forall\lambda \in S$.

Теперь необходимо проверить, что значения оператора $\Phi(y, \lambda)$ не выходят из шаров $\|y\| \leq r_0$. Но поскольку условие сжимаемости оператора $\Phi(y, \lambda)$ выполнено, а условие 2 в теореме 2 такое же, как и в теореме 1, то доказательство того, что $\|\Phi(y, \lambda)\| \leq r_0$ в некоторой секториальной окрестности нуля $S_0 \subseteq S$ будет как в теореме 1. Поэтому опустим эту часть доказательства.

После того, как мы показали, что к уравнению (3) можно применять принцип сжимающих отображений, будем искать решение в виде предела последовательности $\{y_n\}$, $n = 1, 2, ..$, где $y_n = \Phi(y_{(n-1)}, \lambda)$, а в качестве начального приближения выберем $y_0 = 0$ или любой другой элемент из шара $\|y\| \leq r_0$. То, что предел последовательности существует, гарантирует принцип сжимающих отображений. Поэтому решение уравнения (3) обозначим $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Но тогда решение уравнения (1) будет иметь вид $x = a^{1/l}(\lambda)y$. Кроме указанного решения уравнения (1) в общем случае могут существовать и другие малые решения уравнения (1), поскольку уравнение (1) в силу оценки (2) не относится к регулярному случаю. Но из всех малых решений найденное нами решение будет решением максимального порядка малости. □

Замечание 1. Примеры 1, 2 показывают, что теоремы 1, 2 позволяют строить решения минимального порядка малости нелинейных уравнений 2-го и 1-го рода.

Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы. Госконтракт по ФЦП «Кадры» П 696 от 20 мая 2010 года.

Литература

1. Сидоров, Н.А. Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы / Н.А. Сидоров // Нелинейные граничные задачи. – 2004. – Вып. 14. – С. 161 – 164.

2. Леонтьев, Р.Ю. Теоремы о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях и минимальные ветви решений нелинейных уравнений / Р.Ю. Леонтьев // Вестн. ЮУрГУ, сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2008. – №15(115), вып. 1. – С. 37 – 41.

3. Сидоров, Н.А. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях / Н.А. Сидоров, Р.Ю. Леонтьев // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16. – С. 226 – 237.

Леонтьев Роман Юрьевич, кафедра «Математического анализа и дифференциальных уравнений», Иркутский государственный университет, lev_roma@bk.ru.

Поступила в редакцию 2 ноября 2010 г.