

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

А.В. Келлер

THE ALGORITHM FOR SOLUTION OF THE SHOWALTER – SIDOROV PROBLEM FOR LEONTIEF TYPE MODELS

A.V. Keller

Работа посвящена задаче Шоуолтера – Сидорова для моделей леонтьевского типа. Представлен алгоритм решения этой задачи в виде блок-схемы программы, написанной на языке C++. Представлены результаты вычислительных экспериментов для моделей леонтьевского типа.

Ключевые слова: задача Шоуолтера – Сидорова, модели леонтьевского типа, алгоритм программы.

The paper is devoted to the Showalter – Sidorov problem for Leontief type models. We describe an algorithm for that problem as flowchart of programme written by C++. The experimental results for Leontief type models are presented.

Keywords: the Showalter-Sidorov problem, Leontief type models, an algorithm of programm.

Введение

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n , причем $\det L = 0$. Будем рассматривать задачу Шоуолтера – Сидорова

$$\left[(\alpha L - M)^{-1} L \right]^P (u(0) - u_0) = 0 \quad (0.1)$$

для вырожденной системы уравнений

$$L\dot{u} = Mu + f, \quad (0.2)$$

где $R_\alpha^L(M) = (\alpha L - M)^{-1} L$ – правая L -резольвента матрицы M , в отличие от ее левой L -резольвенты $L_\alpha^L(M) = L(\alpha L - M)^{-1}$, а $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – некоторая вектор-функция (здесь и далее терминологию см. в [1]). Одним из важных случаев системы (0.2) является динамическая балансовая система В.В. Леонтьева «затраты-выпуск» с учетом запасов (см. в [2]), поэтому в [3] было предложено такие системы уравнений называть «системами леонтьевского типа». При решении конкретных прикладных задач, сводящихся к системам леонтьевского типа, полученную модель будем называть моделью леонтьевского типа.

В [3] предложен алгоритм решения задачи Коши $u(0) = u_0$ для системы леонтьевского типа (0.2). Несмотря на высокое качество программного продукта, основным недостатком этого алгоритма является ограничение на размер матриц, входящих в состав системы. Это ограничение обусловлено необходимостью построения множества допустимых начальных значений, понимаемых как фазовое пространство системы (0.2), и наложением условия согласования $f(t)$ с начальным значением u_0 . Рассмотрение в качестве начальных условий

(0.1) позволит избежать этих трудностей. Именно поэтому начальные условия Шоултера – Сидорова рассматриваются при исследовании различных прикладных задач [4 – 6]. Основная цель данной статьи – построение алгоритма численного решения задачи Шоултера – Сидорова в виде блок-схемы. Статья состоит из введения и трех параграфов. В первом приводится теорема о численном решении задачи Шоултера – Сидорова и основных этапах алгоритма, во втором – блок-схема алгоритма, в третьем – результаты численных экспериментов для двух моделей леонтьевского типа.

1. Численное решение задачи Шоултера – Сидорова

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n , причем $\det L = 0$. Следуя [7], гл. XII, п.2, пучок матриц $\mu L - M$ назовем (L, p) -регулярным, если существует число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\lambda L - M) \neq 0$ и ∞ – полюс порядка $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Заметим, что условие (L, p) -регулярности пучка матриц эквивалентно условию (L, p) -регулярности матрицы M [8]. Решением системы (0.2) называется вектор-функция $u_0 \in C^1((0; T); \mathbb{R}^n) \cap C([0; T]; \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая уравнениям системы. Решение системы (0.2) называется решением задачи (0.1), (0.2), если оно вдобавок удовлетворяет условию (0.1). Имеет место

Теорема 1. [[1], гл.4] Пусть матрица M (L, p) -регулярна, вектор-функция $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такова, что $(L_\alpha^L(M))^p f \in C([0; T]; \mathbb{R}^n)$, а $\mathbb{I} - (L_\alpha^L(M))^p f \in C^{p+1}((0; T); \mathbb{R}^n) \cap C^p([0; T]; \mathbb{R}^n)$. Тогда при любом $u_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение задачи (0.1), (0.2), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} (I - Q) f^{(q)}(t) + U^t u_0 + \int_0^t R^{t-s} Q f(s) ds. \quad (1.1)$$

Здесь

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad R^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu$$

контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Контурные интегралы не очень удобны в численных расчетах, поэтому в [3] предложен другой подход, основанный на аппроксимациях типа Уиддера-Поста [[1], гл. 2]. Именно справедлива

Теорема 2. Пусть матрица M (L, p) -регулярна, зафиксировав $T \in \text{Re}_+$, $t \in (0, T)$, $k \in \mathbb{N}$ положим

$$U_k^t = \left[\left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)}, \quad Q_k = [k L_k^L(M)]^{p+1},$$

$$R_k^t = \left[\left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)-1} \left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1}.$$

Тогда при любых $u_0 \in \mathbb{R}^n$ и вектор-функции $f \in C^{p+1}((0; T); \mathbb{R}^n) \cap C^p([0; T]; \mathbb{R}^n)$ приближенное решение задачи (0.1) и (0.2) имеет вид

$$u_k(t) = - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} (I - Q_k) f^{(q)}(t) + U_k^t u_0 + \int_0^t R_k^{t-s} Q_k f(s) ds. \quad (1.2)$$

При построении алгоритма принимается допущение о том, что $\det M \neq 0$. Оно не ограничивает общности предыдущих рассуждений. Действительно, при условии регулярности пучка $\mu L - M$ можно сделать замену $u = e^{\lambda t} v$ в уравнении (0.2) и перейти к уравнению

$$L\dot{v} = (M - \lambda L)v + e^{-\lambda t}(y + Bu) \quad (1.3)$$

того же вида, что и (0.2), но $\det(M - \lambda L) \neq 0$. Обратный переход от решений системы (1.3) к решениям системы (0.2) очевиден.

2. Блок-схема алгоритма численного решения задачи Шоултера – Сидорова

Алгоритм численного решения реализован на языке C++ [9]. Он является современным языком программирования, позволяющим удобно писать эффективные программы. Большинство известных компиляторов других языков значительно проигрывают в скорости выполнения программ известным компиляторам C++. Приведем блок-схему алгоритма (см. рисунок).

На первом этапе алгоритма нужно найти числа $\alpha \in R$ и $p \in \{0\} \cup N$. Рассмотрим многочлен

$$\det(\mu L - M) = a_n \mu^n + a_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + a_1 \mu + a_0.$$

Поскольку $a_n = \det L$, то коэффициент $a_l = (-1)^{n-l} \sum_{r=1}^{C_n^{n-l}} \Delta_{n-l}^r$ ($l = \overline{0, n}$), Δ_{n-l}^r – определители, получаемые из определителя матрицы L путем замены $n-l$ столбцов соответствующими столбцами матрицы M , r – порядковый номер определителя, $q \leq \text{rank} L$. Итак,

$$\det(\mu L - M) = a_q \mu^q + a_{q-1} \mu^{q-1} + \dots + a_1 \mu + a_0,$$

где $q = \text{deg} \det(\mu L - M) \leq \text{rank} L$. Поэтому, если взять число $\alpha \in R$ таким, что

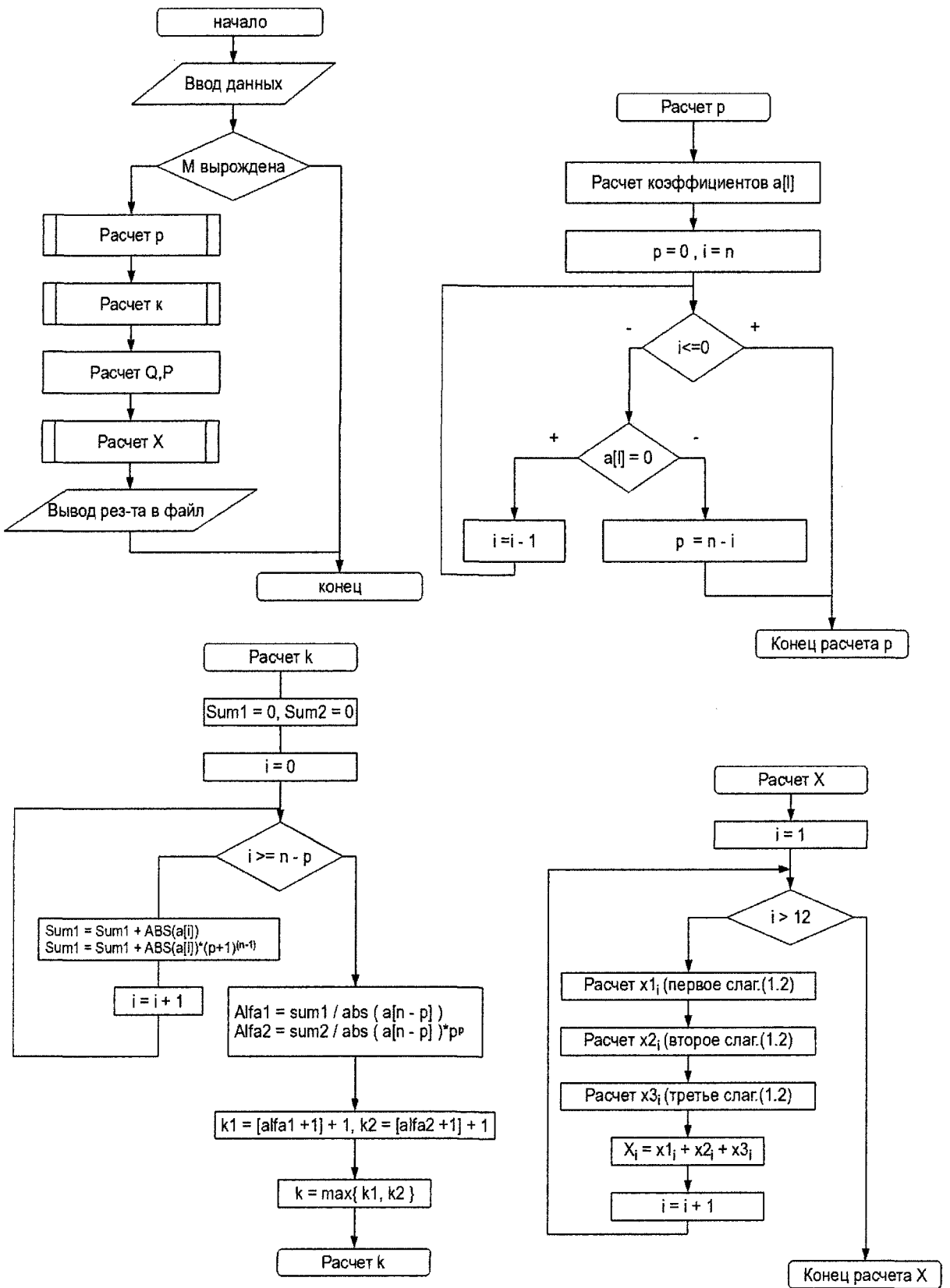
$$\alpha > \max \left\{ 1, |a_q|^{-1} \left(\sum_{l=0}^q |a_l| \right) \right\},$$

то $\det(\alpha L - M) \neq 0$, и, значит, существует матрица $(\alpha L - M)^{-1}$. Далее, считая, что матрица M обратима, представим $\det(\mu L - M) = \det M \det(\mu M^{-1} L - I)$. Зная, что порядок полюса в точке ∞ резольвенты $(\mu I - M^{-1} L)^{-1}$ равен нулю, легко найти, что порядок полюса L -резольвенты матрицы M в точке ∞ равен $n - q$. Итак, числа α и $p = n - q$ найдены.

Далее будем находить значение k , с которого можно начинать считать приближенные проекторы, получим, что мы не сможем оказаться даже вблизи точки L -спектра оператора M при $k = \max \{k_1; k_2\}$, где $t \in [0, 1]$

$$k_1 > \frac{1}{|a_q|} \sum_{l=0}^q |a_l| + 1, \quad k_2 > \frac{1}{|a_q| p^p} \sum_{l=0}^q |a_l| (p+1)^{n-l} + 1, |t| < 1.$$

Далее вычисляются матрицы, входящие в состав (1.2), при численном интегрировании применяется квадратурная формула Гаусса, вычислится приближенное решение задачи (0.1), (0.2).



Блок-схема алгоритма

3. Примеры моделей леонтьевского типа

Пример 3.1. Рассмотрим модель модернизированного устройства, приведенную в [10]. Редуцируя ее к модели леонтьевского типа, как предложено в [11], получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{z} = \begin{pmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -117 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 15 \sin^2 \pi t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где $z = (x_1(t), x_2(t), y(t))$, $z_0 = (0, 0, 0)$. В табл. 1 приведено численное решение системы (3.1).

Таблица 1

Приближенное решение задачи динамического измерения

t	x_1	x_2	y
0	0	0	0
1/12	-0,013771	0,029312	0,029312
1/6	-0,066267	0,237938	0,237938
1/4	-0,146596	0,674819	0,674819
1/3	-0,233314	1,253692	1,253692
5/12	-0,303189	1,827654	1,827654
1/2	-0,337497	2,245077	2,245508
7/12	-0,327046	2,394683	2,394683
2/3	-0,274635	2,236538	2,236538
3/4	-0,194309	1,813055	1,813055
5/6	-0,107590	1,237718	1,237718
11/12	-0,037715	0,664689	0,664689
1	-0,003407	0,247513	0,247513

В [12] представлено точное решение системы (3.1), расхождения в точном и приближенном решении порядка не более 10^{-3} .

Пример 3.2. Для небольшого предприятия составлена модель леонтьевского типа. Порядок составления модели для экономических приложений описан в [13]

$$L = \begin{pmatrix} 0,492 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,467 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,319 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17,142 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 66,47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9,091 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0,96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,38 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,08 & 0 & 0,95 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,04 & 0 & 0 & 0,93 & 0 & 0 & 0 & -0,01 & 0 & 0 & 0 \\ -0,05 & 0 & 0 & 0 & 0,86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,02 & -0,02 & -0,03 & -0,33 & -0,11 & -0,03 & -0,01 & -0,03 & 0,95 & -\frac{1}{50} & -\frac{1}{200} \\ -0,19 & -0,03 & -0,06 & -0,13 & -0,11 & -0,33 & -0,25 & -0,66 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,07 & -0,96 & -0,1 & -0,1 & -0,5 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \text{col}(500, 398, 103,5, 500, 50, 300, 900, 309, 0, 0, 0).$$

$$X_0 = \text{col}(52, 600, 313,5, 90, 87,5, 300, 1200, 309, 110, 880, 2167,5).$$

Решение задачи Шоултера – Сидорова представим в табл. 2.

Таблица 2

Численное решение задачи Шоултера – Сидорова

t	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}
0	52	600	313,5	90	87,5	300	1200	309	110	880	2167,5
$\frac{1}{12}$	179,1	807,38	393,4	94,2	88,1	309,2	1340,5	301,8	109,8	951,6	2592,1
$\frac{1}{6}$	302,6	1024,6	482,7	98,45	88,7	317,5	1474,2	302,5	109,5	1031,1	2965,0
$\frac{1}{4}$	448,1	1274,2	592,7	102,4	89,2	325,9	1617,1	303,3	109,1	1119,5	3388,3
$\frac{1}{3}$	619,3	1560,8	728,5	106,4	89,7	334,4	1769,8	304,0	108,4	1217,9	3870,8
$\frac{5}{12}$	820,8	1889,3	896,8	110,1	90,1	343,0	1933,0	304,7	107,6	1328,1	4422,6
$\frac{1}{2}$	1057,9	2265,4	1105,9	113,6	90,5	351,8	2107,4	305,5	106,5	1457,1	5056,3
$\frac{2}{3}$	1337,2	2696,1	1366,5	116,8	90,9	360,6	2294,4	306,3	105,3	1591,1	5787,1
$\frac{3}{4}$	1666,0	3188,1	1692,0	119,5	91,2	369,6	2493,1	307,1	103,7	1748,2	6632,7
$\frac{5}{6}$	2053,1	3749,5	2099,6	121,7	91,3	378,7	2706,1	307,8	101,6	1927,8	7617,7
$\frac{11}{12}$	2508,8	4389,1	2610,8	123,1	91,4	388,0	2933,6	308,6	99,3	2131,9	8766,8
1	3045,5	5116,7	3252,6	123,6	91,4	397,3	3177,0	309,3	96,4	2365,5	10115,5
1	3677,5	5943,0	4063,1	123,1	91,2	406,8	3437,1	310,1	92,9	2633,9	11705,0

Алгоритм эффективен при численном решении моделей леонтьевского типа, у которых размер входящих в них матриц более 10.

Литература

1. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semi-groups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.
2. Леонтьев, В.В. Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев. – М.: Экономика, 1997.
3. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / С.В. Брычев, Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 8. – С. 46 – 52.

4. Загребина, С.А. О задаче Шоултера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22 – 28.
5. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Вычислит. технологии. – 2003. – Т. 8, № 3. – С. 45 – 54.
6. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185 – 1192.
7. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 4-е изд. – М.: Наука, 1988.
8. Келлер, А.В. Системы леонтьевского типа: классы задач с начальным условием Шоултера–Сидорова и численные решения / А.В. Келлер // Изв. Иркут. гос. ун-та, Серия «Математика». – 2009. – Т. 2. – С. 30 – 43.
9. Showolter – Sidorov problem (shosid problem): свидетельство 2010616865 / Келлер А.В.(RU); правообладатель ГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет». – 210615137; заявл. 16.08.2010; зарегестр. 14.10.2010, Реестр программ для ЭВМ.
10. Бизяев, М.Н. Динамические модели и алгоритмы восстановления динамически искаженных сигналов измерительных систем в скользящем режиме: дис. ... канд. тех. наук / М.Н. Бизяев. – Челябинск: ЮУрГУ, 2004.
11. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестн. ЮУрГУ, сер «Мат. моделирование и программирование». – 2010. – № 16(192), Вып. 5. – С. 116 – 120.
12. Келлер, А.В. Свойство регуляризуемости и численное решение задачи динамического измерения / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Вестн. ЮУрГУ, сер «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – № 16(192), Вып. 5. – С. 32 – 38.
13. Келлер, А.В. Алгоритм численного решения задачи Шоултера – Сидорова для систем леонтьевского типа / А.В. Келлер // Методы оптимизации и их приложения: труды XIV Байкальской школы-семинара, Иркутск – Северобайкальск. – 2008. – С. 343 – 350.

Келлер Алевтина Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Общеобразовательные дисциплины», Южно-Уральский государственный университет, alevtinak@inbox.ru.

Поступила в редакцию 15 ноября 2010 г.