

# ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОТНОСТЕЙ И ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА МЕЖДУ СЛОЯМИ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В РЕЗЕРВУАРЕ

*Е.Н. Абросимов, А.Л. Шестаков*

## MEASUREMENT OF THE DENSITIES AND THE INTERFACE BETWEEN LAYERS OF TWO-LAYER LIQUID IN THE TANK

*E.N. Abrosimov, A.L. Shestakov*

Предлагается метод измерения плотностей двухслойной жидкости и положения границы раздела между слоями, основанный на применении двух датчиков давления, один из которых находится у дна резервуара, а второй – вблизи границы раздела слоев жидкости. Приводятся результаты моделирования предлагаемого метода измерения.

*Ключевые слова:* измерение плотности, измерение уровня, определение положения границы между слоями.

The article proposes a method of measuring densities of two-layer liquid and interface position between layers, based on application of two pressure sensors, first of which is located at bottom of the tank, and the second is located near interface between the layers of liquid. Simulation results of the proposed measurement method are given.

*Keywords:* density measurement, level measurement, position estimation of interface between layers.

### Введение

Задача измерения плотностей двухслойной жидкости и положения границы раздела между слоями является актуальной в различных практических приложениях. Примерами таких сред могут служить рабочая среда пена/пульпа во флотационной машине, нефть/подтоварная вода в отстойных баках или среда газ/нефтепродукт при разделении газожидкостной смеси.

В таких условиях большинство подходов к комплексному измерению параметров двухслойной жидкости оказываются непригодными, поскольку не могут обеспечить контроль всех трех параметров, а только, как правило, одного – или плотности слоев [1], или границы раздела [2]. Ряд подходов могут работать только в электропроводящих [3] или прозрачных [4] жидкостях. Кроме того, существуют способы, которые позволяют измерять плотность и уровень жидкости, но применимы они только к однослойным жидкостям [5].

В связи с вышеизложенным возникает задача рассмотрения иных подходов к измерению параметров двухслойной среды, имеющих достаточно простую методику и позволяющих достичь измерения как плотностей слоев, так и положения границы раздела между слоями.

Наиболее широкое применение для измерения как плотности, так и уровня жидкостей получили гидростатические датчики давления. В данной статье рассматривается метод измерения, основанный на применении датчиков гидростатического давления, и алгоритм обработки данных, получаемых с этих датчиков.

### 1. Описание метода

Имеется резервуар с двухслойной жидкой средой, которая занимает весь объем резервуара (рис. 1).

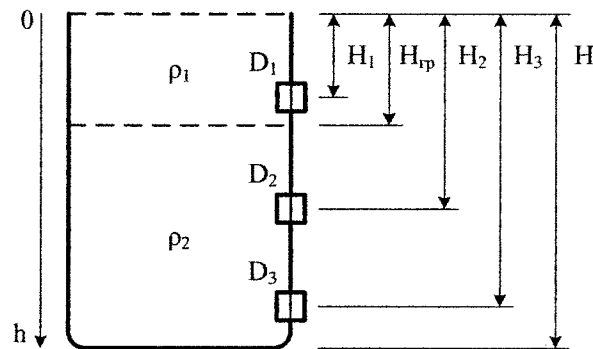


Рис. 1. Резервуар с датчиками давления

Абросимов Евгений Николаевич – ассистент кафедры информационно-измерительной техники ЮУрГУ; abrosimov@init.susu.ac.ru

Шестаков Александр Леонидович – д-р техн. наук, профессор, ректор ЮУрГУ; admin@urc.ac.ru

Abrosimov Evgeniy Nikolaevich – assistant lecturer of the Equipment for information and measuring department of SUSU; abrosimov@init.susu.ac.ru

Shestakov Aleksandr Leonidovich – PhD, professor, rector of SUSU; admin@urc.ac.ru

При постоянно меняющемся положении границы раздела  $H_{гр}$  между двумя слоями наиболее предпочтительным будет дифференциальный метод измерения плотности с двумя приемниками давления, расположенными на разных глубинах. Тогда, для измерения плотностей обоих слоев необходимо использовать четыре датчика давления. Предположим, что двухслойная жидкость полностью занимает резервуар, поэтому в верхней точке резервуара ( $h = 0$ ) давление будет равно атмосферному ( $P_{атм} \approx 100$  кПа). В этом случае задача измерения плотностей двух слоев сведется к применению трех датчиков давления.

Предположим, что граница раздела находится между датчиками  $D_1$  и  $D_2$ . Примем, что начало координат находится в верхней граничной плоскости резервуара. Давление  $P_1$ , измеряемое датчиком  $D_1$ , выразим следующим образом:

$$P_1 = \rho_1 g H_1 + P_{атм}, \quad (1)$$

где  $\rho_1$  – плотность верхнего слоя;  $g$  – ускорение свободного падения;  $H_1$  – координата верхнего датчика;  $P_{атм}$  – атмосферное давление. Откуда для плотности  $\rho_1$  верхнего слоя запишем:

$$\rho_1 = \frac{P_1 - P_{атм}}{g H_1}. \quad (2)$$

Давления  $P_2$  и  $P_3$ , измеряемые датчиками  $D_2$  и  $D_3$ , запишем в виде:

$$P_2 = \rho_2 g (H_2 - H_{гр}) + \rho_1 g H_{гр} + P_{атм}, \quad (3)$$

$$P_3 = \rho_2 g (H_3 - H_{гр}) + \rho_1 g H_{гр} + P_{атм}, \quad (4)$$

где  $\rho_2$  – плотность нижнего слоя,  $H_2$  и  $H_3$  – координаты второго и третьего датчиков соответственно.

Вычтем выражение (4) из выражения (3):

$$P_3 - P_2 = \rho_2 g (H_3 - H_2),$$

отсюда

$$\rho_2 = \frac{P_3 - P_2}{g (H_3 - H_2)}. \quad (5)$$

Из выражений (3) или (4) можно получить также выражения, которые определяют положение границы раздела между слоями:

$$H_{гр} = \frac{\rho_2 g H_2 - P_2 + P_{атм}}{g (\rho_2 - \rho_1)} = \frac{\rho_2 g H_3 - P_3 + P_{атм}}{g (\rho_2 - \rho_1)}. \quad (6)$$

Таким образом, в любой момент времени из-

вестны все три искомых параметра рабочей двухслойной жидкости.

В ряде случаев технологический процесс проходит таким образом, что положение границы раздела слоев колеблется относительно некоторого среднего значения. Тогда для измерения плотностей и положения границы можно использовать два датчика. При этом нижний датчик давления находится внизу резервуара, а верхний датчик давления расположен на уровне среднего положения границы раздела. В реальных условиях граница раздела может отклоняться от этого положения. То есть верхний датчик будет попеременно оказываться то в верхнем, то в нижнем слое. Данная схема размещения датчиков давления изображена на рис. 2.

Рассмотрим два момента времени  $t_1$  и  $t_2$ . В момент  $t_1$  граница раздела будет находиться ниже верхнего датчика, то есть верхний датчик будет находиться в верхнем слое, и будет измеряться плотность верхнего слоя в соответствии с выражением

$$\rho_1 = \frac{P_1(t_1) - P_{атм}}{g H_1}. \quad (7)$$

В момент  $t_2$  верхний датчик будет находиться в нижнем слое. При этом будет измеряться плотность нижнего слоя следующим образом:

$$\rho_2 = \frac{P_2 - P_1(t_2)}{g (H_2 - H_1)}. \quad (8)$$

В обоих случаях давление  $P_2$  датчика  $D_2$  определяется выражением

$$P_2 = \rho_2 g (H_2 - H_{гр}) + \rho_1 g H_{гр} + P_{атм},$$

отсюда

$$H_{гр} = \frac{\rho_2 g H_2 - P_2 + P_{атм}}{g (\rho_2 - \rho_1)}. \quad (9)$$

Заметим, что выражение (9) аналогично выражению (6).

При таком подходе одной из важных задач является задача определения факта перехода границы раздела через верхний датчик давления. Рассмотрим слой жидкости, находящийся на расстоянии  $h$  от верхнего края резервуара. График зависимости плотности и давления от расстояния  $h$  приведен на рис. 3.

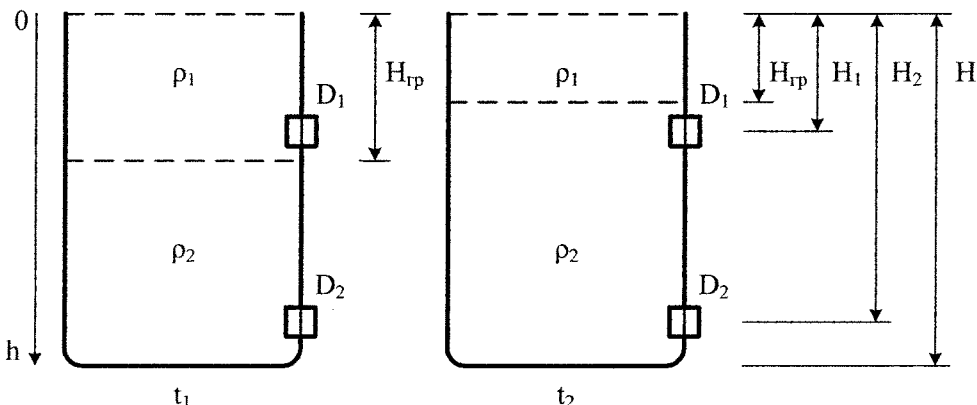


Рис. 2. Резервуар с двумя датчиками давления.  $H_{гр,1}$  – положение границы раздела в первом случае,  $H_{гр,2}$  – положение границы раздела во втором случае

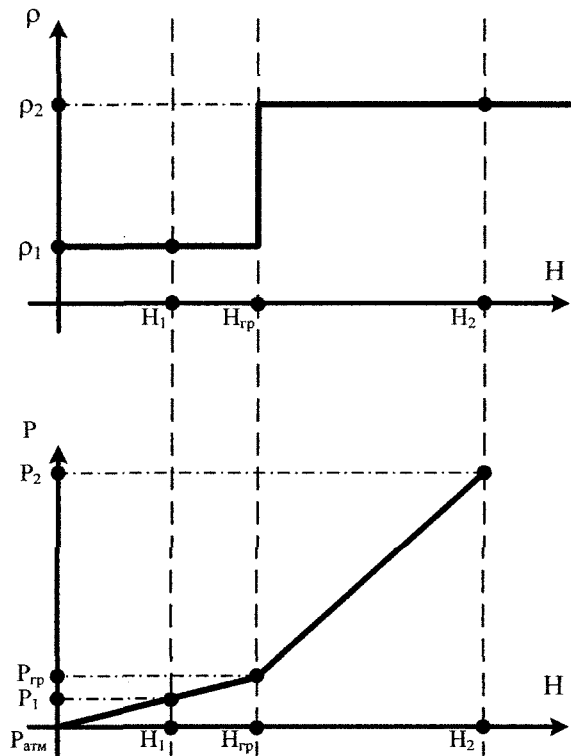


Рис. 3. Зависимости плотности и давления от положения слоя в резервуаре

В точке  $h = H_{гр}$  плотность жидкости изменяется скачком. В этой же точке зависимость  $P(h)$  изменит угол наклона в соответствии с выражением (1). Следовательно, о моменте перехода границы раздела через датчик давления можно судить по изменению скорости роста показаний верхнего датчика давления. Если скорость роста уменьшилась (угол наклона кривой  $P(h)$  стал меньше), то датчик перешел из слоя с плотностью  $\rho_2$  в слой с плотностью  $\rho_1$ . И наоборот, если скорость роста увеличилась (угол наклона кривой  $P(h)$  стал больше), то датчик перешел из слоя с плотностью  $\rho_1$  в слой с плотностью  $\rho_2$ .

## 2. Оценка погрешностей

Будем считать, что в системе, изображенной на рис. 2, измерение давления происходит с погрешностью  $\xi_{P_i}$ , то есть

$$P_1 = P_{1u} + \xi_{P_1}, P_2 = P_{2u} + \xi_{P_2}, \quad (10)$$

где  $P_{1u}$  и  $P_{2u}$  – истинные значения давления датчиков  $D_1$  и  $D_2$ , а  $\xi_{P_1}$  и  $\xi_{P_2}$  – полные погрешности измерения соответствующих давлений.

Оценим погрешности измерения плотностей  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и положения границы раздела  $H_{гр}$  через погрешности измерения датчиков давления  $\xi_{P_1}$  и  $\xi_{P_2}$ . Атмосферное давление  $P_{атм}$  будем считать постоянной известной величиной.

Так как выражения (7) и (8) линейны относительно измеряемых параметров, то согласно [6] среднеквадратические отклонения результатов косвенных измерений плотностей при линейной

зависимости плотности от давления определится следующим образом:

$$\sigma_{\rho_1} = \sqrt{\left(\frac{1}{gH_1}\right)^2 \sigma_{P_1}^2} = \frac{1}{gH_1} \sigma_{P_1}, \quad (11)$$

$$\sigma_{\rho_2} = \frac{1}{g(H_2-H_1)} \sqrt{\sigma_{P_1}^2 + \sigma_{P_2}^2}, \quad (12)$$

где  $\sigma_{P_1(t_2)}^2 = \sigma_{P_1(t_1)}^2 = \sigma_{P_1}^2$ , так как это дисперсии датчика  $D_1$  в разные моменты времени.

Для оценки погрешности определения положения границы раздела перепишем выражение (9), подставив в него выражения (7) и (8), получим:

$$H_{гр} = \frac{(P_2 - P_{атм})H_1(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1H_2}{(P_1(t_1) - P_{атм})(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1} = \frac{P_1(t_2)H_1H_2 - P_2H_1^2 - P_{атм}H_1(H_2 - H_1)}{P_1(t_1)(H_2 - H_1) - P_2H_1 + P_1(t_2)H_1 - P_{атм}(H_2 - H_1)}. \quad (13)$$

Так как выражение (13) нелинейно относительно измеряемых параметров, то согласно [6] для оценки  $H_{гр}$  применим метод линеаризации, который предполагает разложение нелинейной функции в ряд Тейлора:

$$f(a_1, \dots, a_m) = f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial a_i} \Delta a_i + R,$$

где  $f(a_1, \dots, a_m)$  – нелинейная функциональная зависимость измеряемой величины  $f$  от измеренных аргументов  $a_i$ ;  $\partial f / \partial a_i$  – первая производная от функции  $f$  по аргументу  $a_i$ , вычисленная в точках  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$ ;  $R = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_j} \Delta a_i \Delta a_j$  – остаточный член, которым можно пренебречь.

Тогда среднеквадратическое отклонение погрешности измерения положения границы раздела определится следующим образом:

$$\sigma_{H_{гр}} = \sqrt{\left(\frac{\partial H_{гр}}{\partial P_1(t_1)}\right)^2 \sigma_{P_1(t_1)}^2 + \left(\frac{\partial H_{гр}}{\partial P_1(t_2)}\right)^2 \sigma_{P_1(t_2)}^2 + \left(\frac{\partial H_{гр}}{\partial P_2}\right)^2 \sigma_{P_2}^2}. \quad (14)$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{гр}}{\partial P_1(t_1)} &= -\frac{(H_2 - H_1) \left( \frac{P_2 - P_{атм}}{(P_1(t_1) - P_{атм})(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1} - \frac{P_2 - P_1(t_2)}{(P_1(t_1) - P_{атм})(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1} \right)}{H_1 H_2} \\ \frac{\partial H_{гр}}{\partial P_1(t_2)} &= \frac{H_1 H_2}{(P_1(t_1) - P_{атм})(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1} - \frac{H_1}{(P_1(t_1) - P_{атм})(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1} \\ \frac{\partial H_{гр}}{\partial P_2} &= H_1 \frac{(P_2 - P_{атм})H_1(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1H_2}{\left( (P_1(t_1) - P_{атм})(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1 \right)^2} - \frac{H_1^2}{(P_1(t_1) - P_{атм})(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma_{H_{гр}}^2 &= \frac{1}{\left( (P_1(t_1) - P_{атм})(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1 \right)^2} \times \\ &\times \left( (H_2 - H_1)^2 \left( (P_2 - P_{атм})H_1(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1H_2 \right)^2 \sigma_{P_1(t_1)}^2 + \left( H_1H_2 \left( (P_1(t_1) - P_{атм})(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1 \right) - H_1 \left( (P_2 - P_{атм})H_1(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1H_2 \right) \right)^2 \sigma_{P_1(t_2)}^2 + \left( H_1 \left( (P_2 - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -P_{\text{атм}})H_1(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1H_2) - \\
 & -H_1^2 \left( (P_1(t_1) - P_{\text{атм}})(H_2 - H_1) - \right. \\
 & \left. - (P_2 - P_1(t_2))H_1) \right)^2 \sigma_{P_2}^2). \\
 \text{Но } \sigma_{P_1(t_2)}^2 = \sigma_{P_1(t_1)}^2 = \sigma_{P_1}^2, \text{ так как это дисперсии} \\
 \text{датчика } D_1 \text{ в разные моменты времени, тогда} \\
 \sigma_{H_{\text{гп}}}^2 = \frac{1}{((P_1(t_1) - P_{\text{атм}})(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1)^2} \times \\
 \times \left( \left( (H_2 - H_1)^2 \left( (P_2 - P_{\text{атм}})H_1(H_2 - H_1) - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - (P_2 - P_1(t_2))H_1H_2 \right)^2 + \left( (H_1H_2) \left( (P_1(t_1) - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - P_{\text{атм}})(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1) \right) - \right. \\
 \left. - H_1 \left( (P_2 - P_{\text{атм}})H_1(H_2 - H_1) - \right. \right. \\
 \left. \left. - (P_2 - P_1(t_2))H_1H_2 \right) \right)^2 \sigma_{P_1}^2 + \left( H_1 \left( (P_2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - P_{\text{атм}})H_1(H_2 - H_1) - (P_2 - P_1(t_2))H_1H_2) - \right. \right. \\
 \left. \left. - H_1^2 \left( (P_1(t_1) - P_{\text{атм}})(H_2 - H_1) - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - (P_2 - P_1(t_2))H_1) \right)^2 \sigma_{P_2}^2 \right), \quad (15)
 \end{aligned}$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия величины, обозначенной нижним индексом.

### 3. Моделирование работы метода с двумя датчиками

Предложенный метод измерения плотностей слоев и границы раздела между слоями двухслойной жидкости был смоделирован в пакете Matlab7.7.0 с начальными условиями:

- высота резервуара 500 см;
- первый датчик погружен на глубину 250 см;
- второй датчик погружен на глубину 350 см;
- граница раздела находится на глубине 250 см;
- плотность верхнего слоя 200 кг/м<sup>3</sup> и остается постоянной;
- плотность нижнего слоя 1000 кг/м<sup>3</sup> и за время моделирования уменьшается до 900 кг/м<sup>3</sup>;
- время моделирования 5000 с;
- предполагалось, что погрешности датчиков представляют собой белый шум с амплитудой 2 % от предельного значения показания датчиков с учетом атмосферного давления;
- положение границы раздела слоев задавалось выражением:

$$H_{\text{гп}} = 10(\sin(0,003t) + 0,4 \cos(0,004t)),$$

где  $t$  – время, с.

При моделировании на каждой секунде делалась выборка из 10 измерений давлений датчиков. По полученной выборке оценивались математические ожидания и дисперсии давлений. По каждому измерению выборки рассчитывались плотности слоев и положение границы раздела, для которых, в свою очередь, также рассчитывались математические ожидания и дисперсии.

В результате моделирования получили, что предельное значения давления для верхнего датчика составляет 6 кПа, а для нижнего – 15 кПа. Тогда амплитуда белого шума верхнего датчика составит  $3\sigma_{P_1}=120$  Па, а амплитуда белого шума нижнего датчика составит  $3\sigma_{P_2}=300$  Па. Подставив эти значение в выражения (11) и (12), получим:

$$\sigma_{\rho_1} = \frac{1}{gH_1} \sigma_{P_1} = \frac{1}{9,8 \cdot 2,5} \cdot 40 = 1,63 \text{ кг/м}^3,$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho_2} &= \frac{1}{g(H_2 - H_1)} \sqrt{(\sigma_{P_2}^2 + \sigma_{P_1}^2)} = \\
 &= \frac{1}{9,8(3,5 - 2,5)} \sqrt{100^2 + 40^2} = 10,99 \text{ кг/м}^3.
 \end{aligned}$$

Поскольку в выражение (15) входят текущие значения давления  $P_2$  и плотностей  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , для теоретической оценки СКО возьмем их для момента времени  $t=2000$  с. В этот момент  $P_1=5,157$  кПа,  $P_2=14,575$  кПа с учетом атмосферного давления,  $H_{\text{гп}}=2,466$  м,  $\rho_1=200$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2=960,02$  кг/м<sup>3</sup>. Тогда расчетное значение СКО в момент времени  $t=2000$  с составит  $\sigma_{H_{\text{гп}}} = 6,67 \cdot 10^{-3}$  м.

По результатам моделирования определили, что СКО для плотности верхнего слоя  $\rho_1$  составляет  $\sigma_{\rho_1}=1,59$  кг/м<sup>3</sup>, СКО для плотности нижнего слоя  $\rho_2$  составляет  $\sigma_{\rho_2}=10,71$  кг/м<sup>3</sup>. СКО для положения границы раздела  $H_{\text{гп}}$  составляет  $\sigma_{H_{\text{гп}}}=6,52 \cdot 10^{-3}$  м, а СКО для положения границы раздела  $H_{\text{гп}}$  в момент времени  $t=2000$  с.  $\sigma_{H_{\text{гп}}} = 6,29 \cdot 10^{-3}$  м.

На рис. 4–6 представлены графики результатов моделирования, где сплошная линия – это заданное значение параметра.

В силу того, что в выражения (8) и (9) входят плотности обоих слоев, которые в условиях использования только двух датчиков давления нам не известны одновременно, то определение положения границы раздела между слоями возможно только после того, как граница раздела перейдет среднюю линию датчика давления хотя бы один раз.

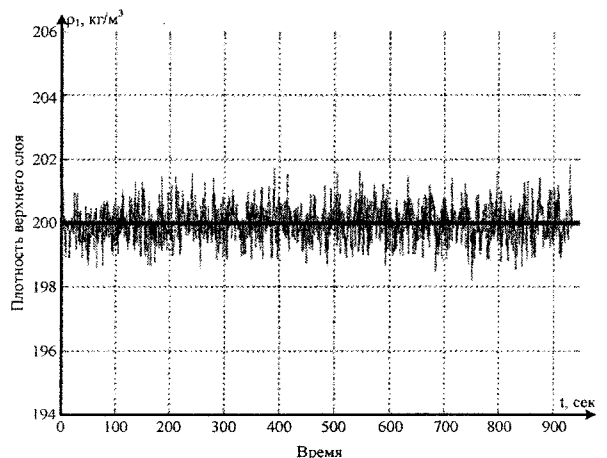


Рис. 4. Плотность  $\rho_1$  верхнего слоя

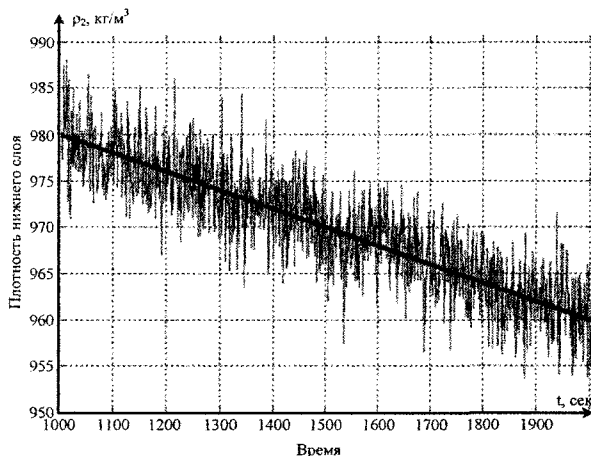


Рис. 5. Плотность  $\rho_2$  нижнего слоя

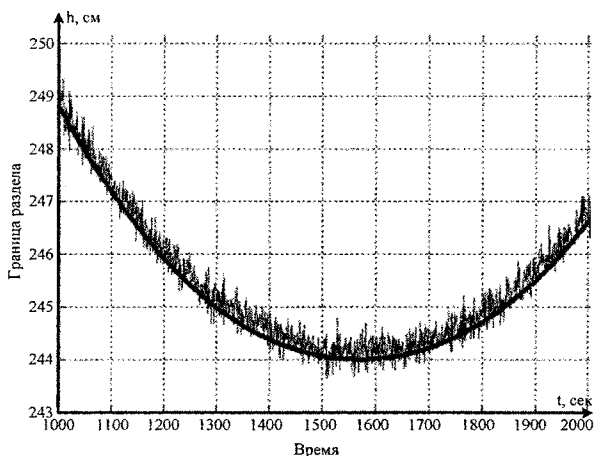


Рис. 6. Положение границы раздела между слоями

### Заключение

В статье предложен метод измерения плотностей слоев и границы раздела между слоями двухслойной жидкости, основанный на применении двух датчиков давления. Приведены результаты моделирования, которые подтверждают работоспособность предложенного метода. Дана оценка погрешности измерения.

### Литература

1. Мордасов, Д.М. Пневмодинамический численно-импульсный метод контроля плотности жидкостей / Д.М. Мордасов // Вестник ТГТУ. – 2005. – Т. 11. – № 2А.
2. Лункин, Б.В. Определение положения границ раздела слоистых сред с помощью радиочас-

тотных датчиков / Б.В. Лункин, Н.А. Криксунова // Датчики и системы. – 2007. – № 1.

3. Совлуков, А.С. Измерение количества сжиженного углеводородного газа в резервуаре / А.С. Совлуков, В.И. Терешин // Измерительная техника. – 2006. – № 2.

4. Мецераков, В.А. Новый способ измерения уровня жидкости / В.А. Мецераков, А.В. Бадеев, Т.И. Мурашкина // Датчики и системы. – 2003. – № 7.

5. Безменов, В.С. Барботажный измеритель плотности и уровня буровых и цементных растворов / В.С. Безменов, Л.И. Орлов // Датчики и системы. – 2001. – № 1.

6. МИ 2083-90 ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. – М.: Изд-во стандартов, 1991.

Поступила в редакцию 16 ноября 2010 г.