УДК 521.1+521.13

S-МАТРИЦА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПО ЗАКОНУ ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

В.Б. Сурнев

S-MATRIX OF THE SYSTEM OF MATERIAL POINTS INTERACTING BY NEWTON'S LAW OF GRAVITY

V.B. Surnev

Предложен метод решения основной задачи небесной механики об эволюции системы N материальных точек, взаимодействующих между собой по закону всемирного тяготения Ньютона. Метод основан на сведении задачи Коши для системы дифференциальных уравнений движения системы n материальных точек, следующих из второго закона динамики, к эквивалентной системе интегральных уравнений Вольтерра. При помощи мультипольного разложения напряжённости гравитационного поля получена иерархия интегральных уравнений Вольтерра с различными степенными нелинейностями. Показано, что в линейном приближении основная задача небесной механики может быть сформулирована как задача многочастичного рассеяния.

Ключевые слова: небесная механика, задача многих тел, закон всемирного тяготения, интегральные уравнения, начальная задача, матрица рассеяния.

The author suggests a method of solving of the main problem of celestial mechanics about evolution of the system of material points, interacting between themselves according to Newton's law of gravity. The method is based on Cauchy problem convergence for the system of differential equations of the system movement N material points, following from the second law of dynamics to the equivalent system of integral Volterra equations. With the help of multi-pole expansion of gravitational field density a hierarchy of integral Volterra equations has been received with various exponential nonlinearity. The author neither shows, that in linear approach the main problem of celestial mechanics maybe formulated as a many-particle scattering problem.

Keywords: celestial mechanics, many-body problem, the law of gravity, integral equations, initial problem, matrix of scattering.

Введение

Задача многих тел (основная задача небесной механики) известна давно. Для её решения развиты многочисленные методы [1–3]. В статье предлагается формулировка задачи многих тел, основанная на векторном интегральном уравнении – аналоге основного интегрального уравнения теории рассеяния (уравнения Липмана–Швингера). Результатом этой формулировки является алгоритм решения задачи многих тел, позволяющий путём решения векторного интегрального уравнения выразить аналитически и рассчитать численно матрицу рассеяния системы многих тел – так называемую S-матрицу системы.

1. Постановка задачи многих тел в небесной механике

Постановка задачи многих тел основана на известных из литературы [1–3] физических положениях. Приведём формализованную постановку основной задачи небесной механики.

Пусть рассматривается система N $(N \geq 2)$ материальных точек M_i $\left(i=\overline{1,N}\right)$, движущихся в соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона, и пусть выполнены следующие условия:

1) существует строго положительная постоянная f;

2) существует совокупность строго положительных постоянных m_i $\left(i=\overline{1,N}\right)$, называемых массами;

3) фиксирована ортонормированная система координат (репер) $\left\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \subset R^3$ в трёхмерном евклидовом пространстве;

Сурнев Виктор Борисович – д-р физ.-мат. наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой математики, Уральский государственный горный университет, г. Екатеринбург; math@ursmu.ru

Surnev Victor Borisovich – PhD, professor, vice-head of the Mathematics department of Ural State Mining University, Ekaterinburg; math@ursmu.ru

4) существует независимая переменная t, изменяющаяся на некотором заданном промежутке времени $t \in [t_0, T]$;

5) путь каждой из материальных точек системы является решением задачи Коши для системы $3N$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{m_i m_j}{R_{ij}^3} \vec{R}_{ij} \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$\vec{R}_i(t)\Big|_{t=t_0} = \vec{R}_i(t_0), \quad \frac{d\vec{R}_i(t)}{dt}\Big|_{t=t_0} = \frac{d\vec{R}_i(t_0)}{dt}, \qquad (2)$$

где $R_{ij} = R_{ji} \equiv \left\| \vec{R}_j - \vec{R}_i \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} \left(x_j^k - x_i^k \right)^2}$ – расстояние от точки с массой m_j до точки с массой m_i.

Постоянная f называется универсальной гравитационной постоянной, система координат $\left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ – инерциальной системой координат, время t – абсолютным или астрономическим временем. Отметим что, так как взаимные радиусы-векторы материальных точек, обозначенные $\vec{R}_{ij} = \vec{R}_j - \vec{R}_i$, направлены от точки m_i к точке m_j, то справедливы соотношения:

$$\vec{R}_{ji} = -\vec{R}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \qquad (3)$$

Основная задача небесной механики состоит в нахождении решения задачи Коши для системы уравнений (1) с начальными условиями (2).

Систему уравнений (1) целесообразно переписать в компактном виде:

$$\frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N} \frac{f \Delta_{ij} \cdot m_j}{\left\| \vec{R}_j - \vec{R}_i \right\|^2} \cdot \frac{\vec{R}_j - \vec{R}_i}{\left\| \vec{R}_j - \vec{R}_i \right\|}, \qquad (4)$$

учитывающим отсутствие самовоздействия материальных точек, то есть локальность теории, посредством наличия в записи системы уравнений символа $\Delta_{ij} = \begin{cases} 1, i \neq j, \\ 0, i = j. \end{cases}$

В скалярной форме система уравнений принимает вид

$$\frac{d^2 x_i^k}{dt^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{f \Delta_{ij} \cdot m_j \left(x_j^k - x_i^k \right)}{\left[\sqrt{\sum_{l=1}^{3} \left(x_j^l - x_i^l \right)^2} \right]^3}, \qquad (5)$$

где индекс $k = 1, 2, 3$ нумерует координаты материальной точки.

Отметим, что в записи основной системы уравнений задачи N тел (1) или (4) мы намеренно не использовали, как это обычно делается, понятие силовой функции, имея в виду другую форму записи основной системы, которую приведём ниже.

2. Система нелинейных интегральных уравнений задачи N тел

Система дифференциальных уравнений второго порядка (1) или (4) по известной классификации [4] может быть отнесена к нелинейным системам, так как дифференциальный оператор этой системы не имеет стандартного для линейных систем вида $L = A\frac{d^2}{dt^2} + B\frac{d}{dt} + C$, где A, B и C – в общем случае зависящие от времени t матрицы. Несмотря на кажущийся простой общий вид, система обыкновенных дифференциальных уравнений (4) достаточно сложна по своим свойствам.

Вектор-функция в правой части (4) по своему физическому смыслу является напряжённостью ньютоновского гравитационного поля, создаваемого в месте расположения точки с номером i остальными точками системы. Введём обозначение для напряжённости ньютоновского гравитационного поля:

$$\vec{F}_i\left(\vec{R}_i, \vec{R}_j, t \right) \equiv \vec{F}_i\left(\vec{R}_j - \vec{R}_i \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{f \Delta_{ij} m_j}{\left\| \vec{R}_j - \vec{R}_i \right\|^2} \cdot \frac{\vec{R}_j - \vec{R}_i}{\left\| \vec{R}_j - \vec{R}_i \right\|}. \qquad (6)$$

Тогда система уравнений (4) переписывается в формально более простом виде:

$$\frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = \vec{F}_i\left(\vec{R}_i, \vec{R}_j, t \right). \qquad (7)$$

Интегрируя систему (7) по времени в промежутке $[t_0, t] \subset [t_0, T]$ и учитывая второе начальное условие (2), получим

$$\frac{d\vec{R}_i}{dt}(t) = \frac{d\vec{R}_i(t_0)}{dt} + \int_{t_0}^{t} \vec{F}_i\left(\vec{R}_i, \vec{R}_j, t \right) dt.$$

Интегрируя получившееся уравнение по промежутку $[t_0, t] \subset [t_0, T]$ ещё раз и используя первое из начальных условий (2), получим

$$\vec{R}_i(t) = \vec{R}_i(t_0) + \frac{d\vec{R}_i(t_0)}{dt}(t - t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \vec{F}_i\left(\vec{R}_i, \vec{R}_j, t \right) dt dt. \qquad (8)$$

Применяя в (8) формулу Дирихле [5], получаем окончательно

$$\vec{R}_i(t)=\vec{R}_i(t_0)+\frac{d\vec{R}_i(t_0)}{dt}(t-t_0)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\vec{F}_i\left(\vec{R}_i,\vec{R}_j,\xi\right)d\xi, \qquad (9)$$

где $\vec{F}_i\left(\vec{R}_i,\vec{R}_j,\xi\right)$ определяется согласно выражению (6).

Записанная в векторном виде система нелинейных интегральных уравнений (9), эквивалентная задаче Коши (1), (2) (доказательство эквивалентности получается непосредственным дифференцированием обеих частей векторного уравнения (9)), внешне похожа на систему уравнений Вольтерра. Однако функция $\vec{F}_i\left(\vec{R}_i,\vec{R}_j,\xi\right)$, как следует из её вида (6), является сингулярной. Кроме этого, исходя из физического смысла задачи, который состоит в том, что взаимодействующие тела считаются «твёрдыми», решения системы уравнений (9), даже если они существуют, на расстояниях $\left\|\vec{R}_i-\vec{R}_j\right\|\le\frac{D_i+D_j}{2}$ между материальными точками с радиусами-векторами $\vec{R}_i$, $\vec{R}_j$ и соответствующими диаметрами D_i и D_j, не имеют физического смысла. Систему уравнений (9) будем называть дальше системой интегральных уравнений типа Вольтерра.

Нетрудно проверить, что при расстояниях между взаимодействующими телами, удовлетворяющих неравенству $\left\|\vec{R}_i-\vec{R}_j\right\|>\frac{D_i+D_j}{2}$, достаточные условия сходимости метода последовательных приближений [6] для системы уравнений (9) выполняются. Тем не менее большой объём численного моделирования, выполненного автором для простейшего случая задачи рассеяния на неподвижном центре, показал, что сходимость метода последовательных приближений достигается лишь в случае выполнения более сильного условия $\left\|\vec{R}_i-\vec{R}_j\right\|\gg\frac{D_i+D_j}{2}$, когда взаимодействие между телами слабое, то есть на пролётных траекториях. Как отмечено в работе [7], такая ситуация при решении нелинейных интегральных уравнений имеет место часто. Там же отмечено, что в целях достижения сходимости ряда последовательных приближений для решения нелинейных уравнений применяется метод Ньютона, смысл которого состоит в линеаризации нелинейных уравнений. Численная реализация метода Ньютона наталкивается, однако, на трудность выполнения процедуры численного дифференцирования нелинейного интегрального оператора. Чтобы обойти последнюю трудность, в следующем пункте проведена явная линеаризация нелинейной системы уравнений (9).

3. Разложение напряжённости гравитационного поля в ряд Тейлора

Рассмотрим подынтегральную вектор-функцию в векторном интегральном уравнении (9) – напряжённость ньютоновского гравитационного поля, определённую формулой (6) и зависящую, очевидно, от $3N$ координат всех точек системы. Так, например, для практически важного случая задачи трёх тел напряжённость ньютоновского гравитационного поля зависит от девяти координат взаимодействующих материальных точек

$$\vec{F}_i\left(\vec{R}_j-\vec{R}_i\right)=\vec{F}_i\left(x_1^1,x_1^2,x_1^3,x_2^1,x_2^2,x_2^3,x_3^1,x_3^2,x_3^3\right).$$

В репере $\left\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}$, связанном с инерциальной системой отсчёта, вектор-функция (6) имеет разложение по базису

$$\vec{F}_i\left(\vec{R}_j-\vec{R}_i\right)=F_i^1\left(\vec{R}_{ij}\right)\vec{e}_1+F_i^2\left(\vec{R}_{ij}\right)\vec{e}_2+$$
$$+F_i^3\left(\vec{R}_{ij}\right)\vec{e}_3=\sum_{k=1}^{3}F_i^k\left(\vec{R}_{ij}\right)\vec{e}_k, \qquad (10)$$

где $\vec{R}_{ij}=\vec{R}_j-\vec{R}_i=\left(x_j^1-x_i^1\right)\vec{e}_1+\left(x_j^2-x_i^2\right)\vec{e}_2+$ $+\left(x_j^3-x_i^3\right)\vec{e}_3$, $i,j=\overline{1,N}$. Разложим вектор-функцию (10) в ряд Тейлора в окрестности произвольно выбранного начального состояния. Для этого воспользуемся формулами из работы [8], несколько усовершенствовав обозначения.

В рассматриваемой области пространства конфигураций R^{3N} зададим произвольным образом движение $\hat{W}:J\to R^{3N}$ и соответствующий параметризованный путь $\hat{W}(J)$ таким образом, чтобы путь проходил через точку $M_0\left(\vec{x}_0\right)$, где $\vec{x}_0$ – радиус-вектор в пространстве конфигураций, имеющий координаты $\overset{0}{x}{}_1^1,\overset{0}{x}{}_1^2,\overset{0}{x}{}_1^3,\overset{0}{x}{}_2^1,\overset{0}{x}{}_2^2,\overset{0}{x}{}_2^3,\ldots,\overset{0}{x}{}_N^1,\overset{0}{x}{}_N^2,\overset{0}{x}{}_N^3$. Подставляя скалярную параметризацию пути $x_\alpha^m=x_\alpha^m(t)$, где $\alpha=1,2,\ldots,3N$, $m=1,2,3$, в формулу (10), получаем

$$\vec{F}_i\left(\vec{R}_i,\vec{R}_j,t\right)=\sum_{k=1}^{3}F_i^k\left(x_1^1(t),x_1^2(t),x_1^3(t),\ldots,\right.$$
$$\left.x_N^1(t),x_N^2(t),x_N^3(t)\right)\vec{e}_k. \qquad (11)$$

Теперь вектор-функция $\vec{F}_i$ превращается в сложную функцию одного действительного переменного:

$$\vec{F}_i\left(\vec{x}(t)\right)=\vec{F}_i\left(x_1^1(t),x_1^2(t),x_1^3(t),\ldots,\right.$$
$$\left.x_N^1(t),x_N^2(t),x_N^3(t)\right). \qquad (12)$$

Вектор-функция $\vec{F}_i$ дальше считается гладкой функцией, то есть дифференцируемой нужное число раз функцией в некоторой окрестности точки $M_0\left(\vec{x}_0\right)$. Поэтому функция (12) одного переменного $t\in J$ также является гладкой функцией в некоторой окрестности $V(t_0)$ точки $t_0\in J$ такой, что $f(V)=\hat{W}(J)\cap U\left(\vec{x}_0\right)$. В силу наложенных условий функция $\vec{F}_i$ как функция одного переменного t может быть в окрестности $V(t_0)$ разложена в ряд Тейлора. Для этого сначала разложим в ряд Тейлора каждую координатную функцию:

$$F_i^k\left(\vec{x}\right)=F_i^k\left(\vec{x}_0\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}d^j f\left(\vec{x}_0\right)=$$
$$=F_i^k\left(\vec{x}_0\right)+\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial F_i^k}{\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)dx_\alpha^m+$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial^2 F_i^k}{\partial x_\beta^n\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)dx_\alpha^m dx_\beta^n+\ldots \qquad (13)$$

Подстановка (13) в формулу (11) приводит к разложению вектор-функции в ряд Тейлора в окрестности произвольно выбранного начального состояния $\vec{x}_0=\vec{x}(t_0)$:

$$\vec{F}_i\left(\vec{R}_i,\vec{R}_j,t\right)=\sum_{k=1}^{3}F_i^k\left(\vec{x}_0\right)\vec{e}_k+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\left[\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial F_i^k}{\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)dx_\alpha^m\right]\vec{e}_k+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{1}{2!}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial^2 F_i^k}{\partial x_\beta^n\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)dx_\alpha^m dx_\beta^n\right]\vec{e}_k+\ldots \qquad (14)$$

Формула (14) является аналогом мультипольного разложения, которое широко применяется в задачах электродинамики для представления электростатического потенциала [9], записанным, однако, для вектор-функции напряжённости гравитационного поля.

4. Иерархия приближённых систем интегральных уравнений типа Вольтерра задачи N тел

Подставив разложение (14) в (11), перепишем систему уравнений (9) в виде

$$\vec{R}_i(t)=\vec{R}_i(t_0)+\frac{d\vec{R}_i(t_0)}{dt}(t-t_0)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\left\{\sum_{k=1}^{3}F_i^k\left(\vec{x}_0\right)\vec{e}_k+\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\left[\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial F_i^k}{\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)dx_\alpha^m\right]\vec{e}_k+$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{1}{2!}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial^2 F_i^k}{\partial x_\beta^n\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)dx_\alpha^m dx_\beta^n\right]\vec{e}_k+\ldots\right\}d\xi. \qquad (15)$$

Учитывая, что $dx_\alpha^m=x_\alpha^m(t)-\overset{0}{x}{}_\alpha^m$, где введено обозначение $\overset{0}{x}{}_\alpha^m=x_\alpha^m(t_0)$, получим

$$\vec{R}_i(t)=\vec{R}_i(t_0)+\frac{d\vec{R}_i(t_0)}{dt}(t-t_0)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\left\{\sum_{k=1}^{3}F_i^k\left(\vec{x}_0\right)\vec{e}_k+\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\left[\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial F_i^k}{\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)\left(x_\alpha^m(\xi)-\overset{0}{x}{}_\alpha^m\right)\right]\vec{e}_k+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{1}{2!}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial^2 F_i^k}{\partial x_\beta^n\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)\left(x_\alpha^m(\xi)-\overset{0}{x}{}_\alpha^m\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\left(x_\beta^n(\xi)-\overset{0}{x}{}_\beta^n\right)\right]\vec{e}_k+\ldots\right\}d\xi,. \qquad (16)$$

Проецируя на оси инерциальной системы координат, переписываем векторное интегральное уравнение (16) так:

$$x_i^k(t)-\overset{0}{x}{}_i^k=\frac{dx_i^k(t_0)}{dt}(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\left\{F_i^k\left(\vec{x}_0\right)+\right.$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial F_i^k}{\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)\left(x_\alpha^m(\xi)-\overset{0}{x}{}_\alpha^m\right)+$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial^2 F_i^k}{\partial x_\beta^n\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)\left(x_\alpha^m(\xi)-\overset{0}{x}{}_\alpha^m\right)\times$$
$$\left.\times\left(x_\beta^n(\xi)-\overset{0}{x}{}_\beta^n\right)+\ldots\right\}d\xi, \qquad (17)$$

или, вводя обозначения $y_i^k(t)\equiv x_i^k(t)-\overset{0}{x}{}_i^k$, в виде

$$y_i^k(t)=\frac{dx_i^k(t_0)}{dt}(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\left\{F_i^k\left(\vec{x}_0\right)+\right.$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial F_i^k}{\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)y_\alpha^m(\xi)+$$
$$\left.+\frac{1}{2!}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial^2 F_i^k}{\partial x_\beta^n\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)y_\alpha^m(\xi)y_\beta^n(\xi)+\ldots\right\}d\xi, \qquad (18)$$

где $k=1,2,3$; $i=1,2,\ldots,N$.

Удерживая в разложении под знаком интеграла в уравнении (18) число слагаемых последовательно $0, 1, 2, \ldots$ и придавая мультииндексу $\omega = (\alpha, \beta)$ значения в пределах $1, 2, \ldots, N$, получаем специальную запись системы интегральных уравнений типа Вольтерра в различных приближениях и для различного числа материальных точек в системе. Приведём первые приближения основной системы уравнений.

Ограничиваясь в правой части уравнения (18) всеми зависящими от переменных x_α^m членами, получаем систему соотношений, дающую решение задачи Коши нулевого приближения:

$$y_i^k(t) = \frac{dx_i^k(t_0)}{dt}(t - t_0) + F_i^k\left(\vec{x}_0\right)\int_{t_0}^{t}(t - \xi)\,d\xi. \quad (19)$$

Ограничиваясь в правой части уравнения (18) только линейными членами, получаем систему интегральных уравнений первого приближения:

$$y_i^k(t) = \frac{dx_i^k(t_0)}{dt}(t - t_0) + F_i^k\left(\vec{x}_0\right)\int_{t_0}^{t}(t - \xi)\,d\xi +$$

$$+\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial F_i^k}{\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)y_\alpha^m(\xi)d\xi. \quad (20)$$

Оставляя в уравнении (18) слагаемые второго порядка, получаем систему второго приближения:

$$y_i^k(t) = \frac{dx_i^k(t_0)}{dt}(t - t_0) + F_i^k\left(\vec{x}_0\right)\int_{t_0}^{t}(t - \xi)\,d\xi +$$

$$+\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial F_i^k}{\partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)y_\alpha^m(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial^2 F_i^k}{\partial x_\beta^n \partial x_\alpha^m}\left(\vec{x}_0\right)y_\alpha^m(\xi)y_\beta^n(\xi)d\xi. \quad (21)$$

Продолжая процесс получения приближённых систем интегральных уравнений, получаем иерархию таких систем, различающихся по порядку степенной нелинейности. Отметим существенное различие системы нелинейных интегральных уравнений (9) и полученных из неё приближённых систем (19)–(21) (и систем последующих приближений). В то время как система нелинейных интегральных уравнений (9) является точной и даёт решение задачи Коши (1), (2) на всём промежутке времени эволюции изучаемой системы, приближённые системы уравнений дают решение задачи Коши (1), (2) лишь в некоторой окрестности начального состояния $M\left(\vec{x}_0\right)$, радиус которой очевидно растёт с ростом приближения. Тем не менее следует отметить, что линеаризованная система интегральных уравнений (20) в силу линейности имеет более простую структуру и может быть решена численно, например, простым разностным методом или методом последовательных приближений [10, 11].

5. Матрица многочастичного рассеяния (S-матрица) системы N тел

Для эффективного численного решения линеаризованной системы интегральных уравнений (20) удобно переписать её в стандартной форме записи.

Вспоминая, что $y_j^i(t) \equiv x_j^i(t) - \overset{0}{x}{}_j^i$, переписываем (20) в виде

$$x_j^i(t) = \overset{0}{x}{}_j^i + \frac{dx_j^i(t_0)}{dt}\cdot(t - t_0) + F_j^i\left(\vec{x}_0\right)\int_{t_0}^{t}(t - \xi)\,d\xi +$$

$$+\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{3}\frac{\partial F_j^i}{\partial x_k^p}\left(\vec{x}_0\right)\cdot\left(x_k^p(\xi) - \overset{0}{x}{}_k^p\right)d\xi.$$

Обозначим

$$\overset{0}{y}{}_j^i(t) = \overset{0}{x}{}_j^i + \frac{dx_j^i(t_0)}{dt}\cdot(t - t_0) + F_j^i\left(\vec{x}_0\right)\int_{t_0}^{t}(t - \xi)\,d\xi -$$

$$-\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{3}\frac{\partial F_j^i}{\partial x_k^p}\left(\vec{x}_0\right)\cdot\overset{0}{x}{}_k^p\,d\xi. \quad (22)$$

Учитывая обозначение (22), преобразуем систему к виду

$$x_j^i(t) = \overset{0}{y}{}_j^i(t) + \int_{t_0}^{t}(t-\xi)\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{3}\frac{\partial F_j^i}{\partial x_k^p}\left(\vec{x}_0\right)\cdot x_k^p(\xi)d\xi.$$

Введём теперь обозначение для ядер уравнений системы

$$K_{jp}^{ik}(t,\xi) = (t - \xi)\frac{\partial F_j^i}{\partial x_k^p}\left(\vec{x}_0\right). \quad (23)$$

С учётом обозначений (23) окончательно получаем систему интегральных уравнений в форме

$$x_j^i(t) = \overset{0}{y}{}_j^i(t) + \int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{3}K_{jp}^{ik}(t,\xi)\cdot x_k^p(\xi)d\xi. \quad (24)$$

Форма записи линеаризованной системы интегральных уравнений задачи N тел (24) соответствует форме записи основного интегрального уравнения Липмана–Швингера теории рассеяния [12] и является наиболее удобной для численной реализации решения методом последовательных приближений.

Рассмотрим условия сходимости метода последовательных приближений для системы уравнений (24). Для того чтобы выкладки не выглядели слишком громоздкими, перепишем систему интегральных уравнений (24) в векторном виде, применяя известные обозначения Дирака. Обозначим $3N$-мерную вектор-функцию с компонентами $x_i^k(t)$, где $k = 1, 2, 3$ и $i = 1, 2, \ldots, N$, символом

$$|x(t)\rangle = \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_1^2(t) \\ x_1^3(t) \\ \ldots \\ x_N^3(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений (24) примет вид

$$\left|x(t)\right\rangle = \left|\overset{0}{y}(t)\right\rangle + \int_{t_0}^{t} K(t,\xi)\left|x(\xi)\right\rangle d\xi. \qquad (25)$$

Матрица

$$K(t-\xi) = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_1^2 & \dots & B_1^N \\ B_2^1 & B_2^2 & \dots & B_2^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_N^1 & B_N^2 & \dots & B_N^N \end{pmatrix}$$

– блочная матрица, составленная из $N \times N$ квадратных блоков третьего порядка следующего вида:

$$B_j^i(t-\xi) = \begin{pmatrix} K_{j1}^{1i}(t,\xi) & K_{j2}^{1i}(t,\xi) & K_{j3}^{1i}(t,\xi) \\ K_{j1}^{2i}(t,\xi) & K_{j2}^{2i}(t,\xi) & K_{j3}^{2i}(t,\xi) \\ K_{j1}^{3i}(t,\xi) & K_{j2}^{3i}(t,\xi) & K_{j3}^{3i}(t,\xi) \end{pmatrix},$$

где $i, j = 1, 2, \dots, N$. Следовательно, например, для задачи двух тел имеем

$$K(t,\xi) = \begin{pmatrix} K_{11}^{11}(t,\xi) & K_{12}^{11}(t,\xi) & K_{13}^{11}(t,\xi) & K_{11}^{12}(t,\xi) & K_{12}^{12}(t,\xi) & K_{13}^{12}(t,\xi) \\ K_{11}^{21}(t,\xi) & K_{12}^{21}(t,\xi) & K_{13}^{21}(t,\xi) & K_{11}^{22}(t,\xi) & K_{12}^{22}(t,\xi) & K_{13}^{22}(t,\xi) \\ K_{11}^{31}(t,\xi) & K_{12}^{31}(t,\xi) & K_{13}^{31}(t,\xi) & K_{11}^{32}(t,\xi) & K_{12}^{32}(t,\xi) & K_{13}^{32}(t,\xi) \\ K_{21}^{11}(t,\xi) & K_{22}^{11}(t,\xi) & K_{23}^{11}(t,\xi) & K_{21}^{12}(t,\xi) & K_{22}^{12}(t,\xi) & K_{23}^{12}(t,\xi) \\ K_{21}^{21}(t,\xi) & K_{22}^{21}(t,\xi) & K_{23}^{21}(t,\xi) & K_{21}^{22}(t,\xi) & K_{22}^{22}(t,\xi) & K_{23}^{22}(t,\xi) \\ K_{21}^{31}(t,\xi) & K_{22}^{31}(t,\xi) & K_{23}^{31}(t,\xi) & K_{21}^{32}(t,\xi) & K_{22}^{32}(t,\xi) & K_{23}^{32}(t,\xi) \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы $K_{jp}^{il}(t,\xi)$ вычисляются по формулам (23).

Векторное интегральное уравнение (25) имеет структуру уравнения Липмана–Швингера теории рассеяния [12, 13] с тем отличием, что уравнение Липмана–Швингера относится к типу Фредгольма. Но это отличие несущественно, так как уравнения типа Вольтерра легко приводятся к виду уравнений Фредгольма [14] на расстояниях, удовлетворяющих упомянутым выше условиям $\left\|\vec{R}_i - \vec{R}_j\right\| > \dfrac{D_i + D_j}{2}$. Как и уравнение Липмана–Швингера, уравнение (25) может быть решено методом последовательных подстановок, который отличается от метода последовательных приближений только тем, что в качестве нулевого приближения выбирается вектор-функция $\left|\overset{0}{y}(t)\right\rangle$, а не произвольная непрерывная функция [10, 11].

В векторном уравнении (25) введём новые обозначения переменной интегрирования $\xi = t_k$ и запишем его для моментов времени $\xi = t_1, t_2, t_3, \dots \in [a, b]$:

$$\left|x(t)\right\rangle = \left|\overset{0}{y}(t)\right\rangle + \int_{t_0}^{t} K(t,t_1)\left|x(t_1)\right\rangle dt_1,$$

$$\left|x(t_1)\right\rangle = \left|\overset{0}{y}(t_1)\right\rangle + \int_{t_0}^{t_1} K(t_1,t_2)\left|x(t_2)\right\rangle dt_2,$$

....

Совершая бесконечную подстановку, получаем решение (25) в виде аналога борновского ряда теории рассеяния

$$\left|x(t)\right\rangle = \left|\overset{0}{y}(t)\right\rangle + \int_{t_0}^{t} K(t,t_1)\left|\overset{0}{y}(t_1)\right\rangle dt_1 +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} K(t,t_1)K(t_1,t_2)\left|\overset{0}{y}(t_2)\right\rangle dt_2 dt_1 +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} k(t,t_1)K(t_1,t_2)K(t_2,t_3)\left|\overset{0}{y}(t_3)\right\rangle dt_3 dt_2 dt_1 + \dots \qquad (26)$$

Решение (26) уравнения (25) теперь может быть записано в виде

$$\left|x(t)\right\rangle = S(t,t')\left|\overset{0}{y}(t')\right\rangle, \qquad (27)$$

где $S(t,t')$ – матрица (оператор) многочастичного рассеяния (или просто S-матрица) системы N взаимодействующих по закону всемирного тяготения материальных точек. Действительно, меняя в (26) обозначение переменной интегрирования, определяем матрицу взаимодействия

$$\mathbf{T} \overset{def}{=} \int_{t_0}^{t} dt_1 K(t,t_1)[\dots] + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} dt_2 dt_1 K(t,t_2)K(t_2,t_1)[\dots] +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} dt_3 dt_2 dt_1 K(t,t_3)K(t_3,t_2)K(t_2,t_1)[\dots] + \dots, \qquad (28)$$

где квадратной скобкой $[\dots]$ обозначено место, на которое помещается вектор-функция $\left|x(t)\right\rangle$. Подставляя (28) в (26), получаем вид (27) решения уравнения (25)

$$\left|x(t)\right\rangle = \left(I + T(t,t')\right)\left|\overset{0}{y}(t')\right\rangle, \qquad (29)$$

где I – единичная матрица. Сравнивая (29) с (27), видим, что S-матрица системы N взаимодействующих по закону всемирного тяготения материальных точек может быть определена равенством $S = I + T$. Таким образом, S-матрицу системы удалось выразить явно в виде матричного интегростепенного ряда.

6. О сходимости борновского ряда

Для целей математического моделирования важен вопрос о сходимости ряда (26). Предполагая, что $\left(\forall i, j = \overline{1, N}\right)$ компоненты вектор-функций $\left|x(t)\right\rangle$ и $\left|\overset{0}{y}(t)\right\rangle$ непрерывны на некотором компактном промежутке $[t_0, T]$, покажем, что ряд (26) сходится на этом промежутке абсолютно и равномерно.

Ядро $K(t,\xi)$ уравнения (25) ограничено на квадрате $[t_0, T] \times [t_0, T]$, а вектор-функция $\left|\overset{0}{y}(t)\right\rangle$

непрерывна на $[t_0, T]$, следовательно, например, по норме $\left\|\overset{0}{x}(t)\right\rangle\Big\| = \max\limits_{t\in[t_0,T]} \left|x_i^k(t)\right|\Big|_{\substack{k=1,3\\ i=1,N}}$ справедливы оценки $\|K(t,\xi)\| \le M$, $\left\|x_i^k(t)\right\| \le N$, откуда для общего члена $V_i^k(t_0, t)$ ряда (26) имеем

$$\left\|V_i^k(t_0,t)\right\| \le N\frac{\left[M(T-t_0)\right]^n}{n!}.$$

Ряд с положительным общим членом $N\frac{\left[M(T-t_0)\right]^n}{n!}$ сходится при любых числах M, N, $T - t_0$ и является мажорантой функционального ряда (26). Поэтому функциональный ряд (26) сходится абсолютно и равномерно на промежутке времени $[t_0, T]$ и, следовательно, на любом компактном промежутке, включающем в себя промежуток $[t_0, T]$.

Учитывая сказанное выше, получаем, что борновский ряд (26) сходится абсолютно и равномерно на любом компактном промежутке $[t_0, T]$, для которого выполняется условие $\left\|\vec{R}_i - \vec{R}_j\right\| > \frac{D_i + D_j}{2}$ (решения, получающиеся при нарушении этого условия, как было отмечено выше, не имеют физического смысла).

Заключение

В статье предложен возможный вариант метода решения основной задачи небесной механики – задачи многих тел. Задача многих тел рассматривается как задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений абсолютного движения системы материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения Ньютона. Получена точная система нелинейных интегральных уравнений (9), эквивалентная задаче Коши. На основе точной системы уравнений с использованием разложения напряжённости ньютоновского гравитационного поля в ряд Тейлора, являющегося аналогом известного мультипольного разложения электростатического потенциала, получена иерархия приближённых систем интегральных уравнений задачи многих тел. Показано, что в линейном приближении основная задача небесной механики может быть переформулирована как задача многочастичного рассеяния, что позволяет ввести S-матрицу системы материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Доказано, что решение линеаризованной системы интегральных уравнений типа Вольтерра (24) или, что то же самое, векторного интегрального уравнения (25) методом последовательных приближений приводит к сходящемуся равномерно и абсолютно борновскому ряду теории рассеяния. Последнее позволяет эффективно вычислять элементы S-матрицы системы.

Отметим, что система интегральных уравнений (9), являясь точной, описывает эволюцию системы, по крайней мере, формально на любом временном промежутке. Система интегральных уравнений (24), полученная из системы (9) путём линеаризации последней в некоторой окрестности произвольно взятого начального состояния, описывает эволюцию системы только в пределах этой окрестности, то есть на малых временах.

Дальнейшее развитие метода S-матрицы (метода интегральных уравнений) применительно к решению задачи многих тел и результаты его численной реализации предполагается изложить в последующих публикациях.

Литература

1. *Дубошин, Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы / Г.Н. Дубошин. – М.: Наука, 1975. – 800 с.*

2. *Рой, А. Движение по орбитам / А. Рой. – М.: Мир, 1981. – 544 с.*

3. *Маркеев, А.П. Задача трёх тел и её точные решения / А.П. Маркеев // Соросовский образовательный журнал. – 1999. – № 9. – С. 112–117.*

4. *Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 468 с.*

5. *Шилов, Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1972. – 622 с.*

6. *Смирнов, Н.С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений / Н.С. Смирнов. – Л.; М.: ГИФМЛ, 1936. – 124 с.*

7. *Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения. Методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 543 с.*

8. *Сурнев, В.Б. Дифференциальная геометрия / В.Б. Сурнев. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2007. – 186 с.*

9. *Новожилов, Ю.В. Электродинамика / Ю.В. Новожилов, Ю.А. Яппа. – М.: Наука, 1978. – 352 с.*

10. *Ловитт, У.В. Линейные интегральные уравнения / У.В. Ловитт. – М.: ГИФМЛ, 1957. – 266 с.*

11. *Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука 1978. – 512 с.*

12. *Тейлор, Дж. Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений / Дж. Тейлор. – М.: Мир, 1975. – 565 с.*

13. *Татарский, В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере / В.И. Татарский. – М.: Наука, 1967. – 548 с.*

14. *Краснов, М.Л. Интегральные уравнения / М.Л. Краснов. – М.: URSS, 2006. – 304 с.*

Поступила в редакцию 20 января 2010 г.