УДК 550.830+539.3

О КОМПЛЕКСИРОВАНИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ АКТИВНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ КАРТИРОВАНИЯ И МОНИТОРИНГА СОСТОЯНИЯ ДВУМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В *N*-СЛОЙНОЙ СРЕДЕ

О.А. Хачай, А.Ю. Хачай

ABOUT COMPLEX APPROACH OF USING SEISMIC AND ELECTROMAGNETIC ACTIVE METHODS FOR MAPPING AND STATE MONITORING OF 2D HETEROGENEITIES IN A *N*-LAYERED MEDIUM

O.A. Hachay, A.Yu. Hachay

Даны анализ решения двумерной прямой задачи для сейсмического поля в динамическом варианте с использованием интегральных и интегродифференциальных уравнений, а также совместный анализ решений двумерных задач для переменного электромагнитного и сейсмического поля для моделей *N*-слойной среды с двумерными однородными включениями.

Ключевые слова: комплексная сейсмическая и электромагнитная методика, алгоритмы решения прямой динамической задачи сейсмики, совместный анализ прямых двумерных задач для сейсмического и электромагнитного поля, двумерная однородная неоднородность в N-слойной среде.

That paper is devoted to analysis of solution 2D direct problem for seismic field in dynamical variant with use integral and integro-differential equations and common analysis with the solution of electromagnetic field for the case H-polarization for the model homogeneous inclusion in *N*-layered medium.

Keywords: complex seismic and electromagnetic method, algorithms of solution of the direct dynamical seismic problem, common analysis of the solutions of seismic and electromagnetic field, 2-d homogeneous heterogeneity in a N-layered medium.

Введение

В связи с усложнением решаемых геологических задач все более актуальной становится проблема создания комплексных методик исследования. При комплексировании геофизических методов необходимо пространственное совмещение систем наблюдения и создание единых интерпретационных алгоритмов. В Институте геофизики УрО РАН разработана единая 3D-методика наблюдений с использованием электромагнитных и сейсмических полей (в динамическом частотно-геометрическом варианте), опирающаяся на единую концепцию трехэтапной интерпретации [10–13], которая включает в себя единую систему векторных наблюдений сейсмических и электромагнитных полей. Используются локальные контролируемые источники возбуждения, для которых выполняются следующие условия: а) единая геометрия нормального поля, б) отсутствие одной или нескольких компонент в измеряемом поле в случае квазислоистой среды. Нами реализован вариант возбуждения электромагнитного поля вертикальным магнитным диполем и сейсмического поля вертикальной силой. Единый подход в интерпретации реализован для предварительно обработанных входных данных: сейсмические данные переводятся из временной области в частотную посредством преобразования Лапласа (для действительного параметра), а электромагнитные данные –

Хачай Ольга Александровна – д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, Институт геофизики УрО РАН; olga.hachay@r66.ru

Хачай Андрей Юрьевич – канд. физ.-мат. наук, доцент математико-механического факультета, Уральский государственный университет имени А.М. Горького, г. Екатеринбург; andrey.khachay@usu.ru

Hachay Olga Alexandrovna – PhD, leading scientific expert of the Institute of geophysics of the Ural Branch of RAS; olga.hachay@r66.ru

Hachay Andrey Yurievitch – PhD, assistant professor of the Mathematics and mechanics department of Ural State University of A.M. Gorky, Ekaterinburg; andrey.khachay@usu.ru

посредством преобразования Фурье (для действительной частоты) [11].

При проведении натурных экспериментов в рамках единой методики возникает возможность количественной оценки сопоставимости информации по различным полям о строении и физических свойствах среды, которая следует из критерия подобия систем наблюдений. В работе [8] изложены теоретические принципы построения такого критерия и алгоритмы его определения для нормальных полей в средах без включений.

В работе [4] изложена идея алгоритма построения критерия подобия для сейсмических и электромагнитных полей от сингулярных источников, эквивалентных проявлению искомого локального объекта в рассматриваемых полях. При этом объект в сейсмическом поле аппроксимируется погруженной точечной горизонтально действующей силой в N-слойном упругом изотропном полупространстве, в электромагнитном поле это погруженный горизонтальный магнитный диполь в N-слойное изотропное проводящее полупространство. Выбор сингулярных источников определялся подобием морфологий создаваемых ими полей при взаимно перпендикулярном направлении моментов электромагнитного и сейсмического сингулярных источников. Разработан итерационный алгоритм вычисления электромагнитного и сейсмического полей при условии расположения аномальных источников в произвольном слое N-слойной среды [5–7].

Настоящая работа посвящена выводу интегральных уравнений двумерной прямой задачи для сейсмического поля в динамическом варианте и совместному анализу интегральных уравнений двумерных задач для электромагнитного и сейсмического полей. Полученные результаты будут использованы для выбора критериев комплексирования сейсмических и электромагнитных методов исследования сложно построенных сред.

1. Прямая динамическая задача сейсмики. Постановка задачи

Основное дифференциальное уравнение динамики упругого тела имеет вид [2]

$$\mu\Delta\vec{u}+(\lambda+\mu)graddiv\,\vec{u}+\sigma\vec{F}_0=\sigma\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{u}(u_x,u_y,u_z)$ – вектор смещения; $\vec{F}_0(F_{0x},F_{0y},F_{0z})$ – вектор массовых сил; λ и μ – постоянные Ламэ; σ – плотность среды; t – время.

Мы будем изучать сейсмическую задачу для случая установившихся колебаний [2]:

$$\mu\Delta\vec{u}+(\lambda+\mu)graddiv\,\vec{u}+\sigma\vec{F}+\omega^2\sigma\vec{u}=0. \qquad (2)$$

Введем обозначения:

$$\Delta^*\equiv\Delta+\frac{\lambda+\mu}{\mu}graddiv;\quad \frac{\sigma}{\mu}\omega^2=k_2^2. \qquad (3)$$

Тогда уравнение (2) с учетом (3) можно переписать в виде

$$\Delta^*\vec{u}+k_2^2\vec{u}=-\frac{\sigma}{\mu}\vec{F}. \qquad (4)$$

Используя векторные преобразования [1], получим

$$(\lambda+2\mu)graddiv\,\vec{u}-\mu rotrot\vec{u}+\omega^2\sigma\vec{u}=-\sigma\vec{F}. \qquad (5)$$

Представим $\vec{u}$ и $\vec{F}$ в виде:

$$\vec{u}=grad\varphi+rot\vec{\psi};\ \vec{F}=grad\Phi+rot\vec{\Psi}. \qquad (6)$$

Введем обозначения:

$$\vec{u}_1=grad\varphi;\ \vec{u}_2=rot\vec{\psi}. \qquad (6')$$

Тогда

$$div\vec{u}=div\vec{u}_1=\Delta\varphi;\ rot\vec{u}=rot\vec{u}_2=$$

$$=graddiv\vec{\psi}-\Delta\vec{\psi} \qquad (7)$$

и

$$graddiv\vec{u}=grad\,\Delta\varphi;\ rotrot\vec{u}=-rot\Delta\vec{\psi}. \qquad (8)$$

Внесем в (5) выражения (6), (8):

$$(\lambda+2\mu)grad\Delta\varphi+\mu rot\Delta\vec{\psi}+\omega^2\sigma grad\varphi+$$

$$+\omega^2\sigma rot\vec{\psi}=-\sigma(grad\Phi+rot\vec{\Psi}). \qquad (9)$$

Следовательно, чтобы удовлетворить (9), достаточно положить

$$(\lambda+2\mu)grad\Delta\varphi+\omega^2\sigma grad\varphi=-\sigma grad\Phi;$$

$$\mu rot\Delta\vec{\psi}+\omega^2\sigma rot\vec{\psi}=-\sigma rot\vec{\Psi},$$

или

$$\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)\Delta\varphi+\omega^2\sigma\varphi=-\sigma\Phi;\\&\mu\Delta\vec{\psi}+\omega^2\sigma\vec{\psi}=-\sigma\vec{\Psi}.\end{aligned} \qquad (10)$$

Введем дополнительно обозначение:

$$\omega^2\frac{\sigma}{\lambda+2\mu}=k_1^2. \qquad (11)$$

С учетом (11) уравнения (10) можно записать в виде:

$$\Delta\varphi+k_1^2\varphi=-\frac{\sigma}{\lambda+2\mu}\Phi;\ \Delta\vec{\psi}+k_2^2\vec{\psi}=-\frac{\sigma}{\mu}\vec{\Psi}. \qquad (12)$$

Будем предполагать, что среда является упругой и выполняется известная линейная зависимость между компонентами тензора напряжений и деформаций [2]:

$$\begin{aligned}&\sigma_x=\lambda div\vec{u}+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x};\ \tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right);\\&\sigma_y=\lambda div\vec{u}+2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y};\ \tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right);\\&\sigma_z=\lambda div\vec{u}+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z};\ \tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right).\end{aligned} \qquad (13)$$

Воспользуемся приведенными в работе [2] наиболее часто употребляемыми граничными условиями: условиями закрепленной и свободной границы. В первом случае обращается в ноль вектор смещения на границе, во втором случае обращаются в ноль векторы напряжения, действующие на площадку границы с нормалью $\vec{n}$.

Для системы уравнений (12) в [2] сформулированы условия излучения в виде:

$$r\vec{u}_1 = O(1), \quad r\left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial r} - ik_1\vec{u}_1\right) = o(1);$$
$$r\vec{u}_2 = O(1), \quad r\left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial r} - ik_2\vec{u}_2\right) = o(1). \qquad (14)$$

2. Задача о дифракции звука на двумерной упругой неоднородности, расположенной в *j*-м слое *N*-слойной среды

Рассмотрим более общую задачу дифракции звука на двумерной упругой неоднородности, расположенной в j-м слое N-слойной среды. Вывод соответствующих уравнений для задачи дифракции звука на двумерной упругой неоднородности, расположенной в упругом пространстве, сделан в работе [2].

Эту задачу будем решать, используя подход, изложенный в работе [3]. Массовые силы будем считать потенциальными и сосредоточенными в первом слое N-слойной среды. Плоскость XOY совпадает с верхней плоскостью 1-го слоя, $z = 0$. Ось OZ направлена вертикально вниз. Образующие двумерной неоднородности в виде цилиндра произвольного сечения направлены вдоль оси OY. Положим $\mu = 0$, тогда в каждом из слоев выполняется первое уравнение из (12), преобразованное к виду:

$$\Delta\varphi_i + k_{1i}^2\varphi_i = -2\pi f_i(M);$$
$$\vec{u} = grad\varphi; \; f_i(M) = \frac{\sigma_i}{2\pi\lambda_i}\Phi_i, \qquad (15)$$

где $i = 1, \ldots, n$; $\Phi_i = \Phi$ при $i = 1$, при $i \neq 1$ $\Phi_i = 0$. Волновое число в i-м слое равно согласно (11):

$$k_{1i}^2 = k_i^2 = \omega^2\frac{\sigma_i}{\lambda_i}. \qquad (16)$$

Введем обозначение:

$\tilde{k}(M) = k_{1i}$ – волновое число в слоистой среде; $i = 1, \ldots, N$ и

$$K(M) = \begin{cases} k_{1ji}, \; M \in S_0; \\ \tilde{k}(M), \; M \notin S_0; \end{cases} \quad k_{1ji}^2 = \omega^2\frac{\sigma_{ji}}{\lambda_{ji}}. \qquad (17)$$

Индекс ji обозначает свойства среды внутри неоднородности, находящейся в пространстве с поверхностью S_0. В общем случае в произвольном слое или внутри неоднородности уравнение (15) с учетом (16) и (17) будет иметь вид:

$$\Delta\varphi_i + K^2(M)\varphi_i = -2\pi f_i(M). \qquad (18)$$

Граничные условия в среде без разрывов, заключающиеся в непрерывности вектора смещения и тензора напряжений согласно (6) и (13) на границах раздела имеют вид:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial z} = 0\Big|_{z\in L_i}; \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{ji} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{ja};$$
$$\left[\sigma_i(\omega^2\varphi_i + \Phi_i)\right] - \left[\sigma_{i+1}(\omega^2\varphi_{i+1} + \Phi_{i+1})\right] = 0\Big|_{z\in L_i};$$
$$\left[\sigma(\omega^2\varphi + \Phi)\right]_{ji} = \left[\sigma(\omega^2\varphi + \Phi)\right]_{ja}; \qquad (19)$$
$$\left[\sigma(\omega^2\varphi + \Phi)\right]\Big|_{z=0} = 0,$$

где индекс ji обозначает значения σ, φ, Φ на границе неоднородности с внутренней стороны, ja – с внешней стороны границы неоднородности, которая расположена в j-м слое; L – граница раздела слоя, с индексом i – со стороны i-го слоя, с индексом i+1 – со стороны i+1-го слоя. Условия затухания на бесконечности согласно (6) и (14) имеют вид:

$$rgrad\varphi_i = O(1), \quad r\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial r} - ik_1\varphi_i\right) = o(1). \qquad (20)$$

Пусть

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_i - \varphi_i^0, \qquad (21)$$

где $i = 1, \ldots, j, \ldots, N$; φ_i^0 – потенциал нормального сейсмического поля в слоистой среде в отсутствие неоднородности: $\varphi_{ji}^0 = \varphi_j^0$ и

$$\Delta\varphi_i^0 + k_{1i}^2\varphi_i^0 = -2\pi f_i(M); \qquad (22)$$

$$\frac{\partial\varphi_i^0}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_{i+1}^0}{\partial z} = 0\Big|_{z\in L_i};$$
$$\left[\sigma_i(\omega^2\varphi_i^0 + \Phi_i)\right] - \left[\sigma_{i+1}(\omega^2\varphi_{i+1}^0 + \Phi_{i+1})\right] = 0\Big|_{z\in L_i}. \qquad (23)$$

На контуре неоднородности φ^0 и $\dfrac{\partial\varphi^0}{\partial n}$ непрерывны. $\tilde{\varphi}_i$ – потенциал аномального сейсмического поля, который, с учетом (18), (17) и (21) удовлетворяет уравнению

$$\Delta\tilde{\varphi}_i + K^2(M)\tilde{\varphi}_i = -(K^2(M) - \tilde{k}^2(M))\varphi_i^0 \qquad (24)$$

и граничным условиям:

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_i}{\partial z} - \frac{\partial\tilde{\varphi}_{i+1}}{\partial z} = 0\Big|_{z\in L_i}; \left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n}\right)_{ji} = \left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n}\right)_{ja};$$
$$\left[\sigma_i\omega^2\tilde{\varphi}_i\right] - \left[\sigma_{i+1}\omega^2\tilde{\varphi}_{i+1}\right] = 0\Big|_{z\in L_i}. \qquad (25)$$

На контуре неоднородности

$$[\sigma\tilde{\varphi}]_{ja} - [\sigma\tilde{\varphi}]_{ji} = (\sigma_{ja} - \sigma_{ji})\varphi^0. \qquad (26)$$

Функция источника сейсмического поля $G_{Sp}(M, M^0)$ определяется решением следующей краевой задачи для N-слойной среды:

$$\Delta G_{Spi} + \tilde{k}^2 G_{Spi}(M, M^0) = -2\pi\delta(M - M^0) \qquad (27)$$

и граничным условием:

$$\frac{\partial G_{Sp,i}}{\partial z} - \frac{\partial G_{Sp,i+1}}{\partial z} = 0\Big|_{z\in L_i}; \; \left[\sigma\omega^2 G_{Sp}\right]\Big|_{z=0} = 0;$$
$$\left[\sigma_i\omega^2 G_{Sp,i}\right] - \left[\sigma_{i+1}\omega^2 G_{Sp,i+1}\right] = 0\Big|_{z\in L_i}. \qquad (28)$$

На контуре неоднородности $G_{Sp}(M, M^0)$ и $\dfrac{\partial G_{Sp}(M, M^0)}{\partial n}$ непрерывны. Применим формулу

Грина [3] для функций $\tilde{\varphi}_i$ и $G_{Sp}(M, M^0)$ для каждого слоя N-слойной среды при $i \neq j$:

$$\int\limits_{L_i}\left(\tilde{\varphi}_i \frac{\partial G_{Sp,i}}{\partial n} - G_{Sp,i}\frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial n}\right)dl_i -$$

$$-\int\limits_{L_{i+1}}\left(\tilde{\varphi}_{i+1} \frac{\partial G_{Sp,i+1}}{\partial n} - G_{Sp,i+1}\frac{\partial \tilde{\varphi}_{i+1}}{\partial n}\right)dl_{i+1} =$$

$$=\begin{cases} 2\pi\tilde{\varphi}_i(M^0),\ M^0 \in S_i; \\ 0,\ M^0 \notin S_i. \end{cases} \qquad (29)$$

При $i = j$

$$\int\limits_{Lj_i}\left(\tilde{\varphi}_j \frac{\partial G_{Sp,j}}{\partial n} - G_{Sp,j}\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial n}\right)dl_j -$$

$$-\int\limits_{L_{j+1}}\left(\tilde{\varphi}_{j+1} \frac{\partial G_{Sp,j+1}}{\partial n} - G_{Sp,j+1}\frac{\partial \tilde{\varphi}_{j+1}}{\partial n}\right)dl_{j+1} +$$

$$+\oint\limits_{C_{ja}}\left(\tilde{\varphi}_{ja} \frac{\partial G_{Sp,j}}{\partial n} - G_{Sp,j}\frac{\partial \tilde{\varphi}_{ja}}{\partial n}\right)dc_{ja} =$$

$$=\begin{cases} 2\pi\tilde{\varphi}_i(M^0),\ M^0 \in S_i; \\ 0,\ M^0 \notin S_i. \end{cases} \qquad (30)$$

Помножим выражения (29) и (30) на σ_i и сложим их с учетом граничных условий (28), в результате чего получим:

$$\frac{\sigma_j}{2\pi}\oint\limits_C(\tilde{\varphi}_{ja}\frac{\partial G_{Sp,j}}{\partial n} - G_{Sp,j}\frac{\partial \tilde{\varphi}_{ja}}{\partial n})dc =$$

$$=\begin{cases} \sigma(M^0)\tilde{\varphi}(M^0),\ M^0 \in S_j - S_C; \\ 0,\ M^0 \notin S_j - S_C. \end{cases} \qquad (31)$$

Применим формулу Грина для функций $\tilde{\varphi}_{ji}$ и $G_{Sp,j}(M, M^0)$ для внутренности области S_C, с учетом (25), (29), (31), (33) получим:

$$\frac{k_{1ji}^2 - k_{1j}^2}{2\pi}\iint\limits_{S_C}\varphi(M)G_{Sp,j}(M, M^0)d\tau_M -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\oint\limits_C(\tilde{\varphi}_{ji}\frac{\partial G_{Sp,j}}{\partial n} - G_{Sp,j}\frac{\partial \tilde{\varphi}_{ji}}{\partial n})dc =$$

$$=\begin{cases} \tilde{\varphi}(M^0),\ M^0 \in S_C; \\ 0,\ M^0 \notin S_C. \end{cases} \qquad (32)$$

Помножим выражение (32) на σ_{ji} и сложим с (32), с учетом граничных условий на контуре C неоднородности получим:

$$\frac{\sigma_{ji}(k_{1ji}^2 - k_{1j}^2)}{2\pi}\iint\limits_{S_C}\varphi(M)G_{Sp,j}(M, M^0)d\tau_M +$$

$$+\frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{ji})}{2\pi}\oint\limits_C\varphi^0(M)\frac{\partial G_{Sp,j}}{\partial n}dc -$$

$$-\frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{ji})}{2\pi}\oint\limits_C G_{Sp,j}\frac{\partial \varphi}{\partial n}dc -$$

$$-\frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{ji})}{2\pi}\oint\limits_C G_{Sp,j}\frac{\partial \varphi^0}{\partial n}dc = \sigma(M^0)\tilde{\varphi}(M^0). \qquad (33)$$

Воспользуемся равенством [3]:

$$\frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{ji})}{2\pi}\oint\limits_C\left(\varphi^0(M)\frac{\partial G_{Sp,j}}{\partial n} - G_{Sp,j}\frac{\partial \varphi^0(M)}{\partial n}\right)dc =$$

$$=\begin{cases} (\sigma_{ja} - \sigma_{ji})\varphi^0(M^0),\ M^0 \in S_C; \\ 0,\ M^0 \notin S_C. \end{cases} \qquad (34)$$

Тогда выражение (33) с учетом (34) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{(k_{1ji}^2 - k_{1j}^2)}{2\pi}\iint\limits_{S_C}\varphi(M)G_{Sp,j}(M, M^0)d\tau_M + \frac{\sigma_{ja}}{\sigma_{ji}}\varphi^0(M^0) - \\ &-\frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{ji})}{\sigma_{ji}2\pi}\oint\limits_C G_{Sp,j}\frac{\partial \varphi}{\partial n}dc = \varphi(M^0),\ M^0 \in S_C; \\ &\frac{\sigma_{ji}(k_{1ji}^2 - k_{1j}^2)}{\sigma(M^0)2\pi}\iint\limits_{S_C}\varphi(M)G_{Sp,j}(M, M^0)d\tau_M + \varphi^0(M^0) - \\ &-\frac{(\sigma_{ja} - \sigma_{ji})}{\sigma(M^0)2\pi}\oint\limits_C G_{Sp,j}\frac{\partial \varphi}{\partial n}dc = \varphi(M^0),\ M^0 \notin S_C. \end{aligned} \qquad (35)$$

Таким образом, решив интегродифференциальное уравнение и определив распределение потенциала вектора упругих смещений внутри неоднородности, мы можем определить, используя второе интегро-дифференциальное представление, потенциал вектора упругих смещений в любом слое, затем используя соотношение (6), вычислить распределение вектора упругих смещений в любом слое.

3. Сопоставление алгоритмов для сейсмического (дифракция звука) и электромагнитного двумерного моделирования (Н-поляризация)

Сравним полученные выражения с решением задачи дифракции электромагнитного поля в рамках той же геометрической модели [3].

$$\begin{aligned} &H_x(M^0) = \frac{k_{ji}^2 - k_j^2}{2\pi}\iint\limits_{S_C}H_x(M)G_m(M, M^0)d\tau_M + \\ &+\frac{k_{ji}^2 - k_j^2}{k_j^2 2\pi}\oint\limits_C H_x(M)\frac{\partial G_m}{\partial n}dc + \frac{k_{ji}^2}{k_j^2}H_x^0(M^0),\ M^0 \in S_C; \end{aligned} \qquad (36)$$

$$\begin{aligned} &H_x(M^0) = \frac{k^2(M^0)(k_{ji}^2 - k_j^2)}{2\pi k_{ji}^2}\iint\limits_{S_C}H_x(M)G_m(M, M^0)d\tau_M + \\ &+\frac{k^2(M^0)(k_{ji}^2 - k_j^2)}{k_{ji}^2 k_j^2 2\pi}\oint\limits_C H_x(M)\frac{\partial G_m}{\partial n}dc + H_x^0(M^0),\ M^0 \notin S_C. \end{aligned}$$

Здесь $k^2(M^0)=i\omega\mu_0\sigma(M^0)$, $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$, $\sigma(M^0)$ – проводимость в точке M^0; i – мнимая единица; $H_x(M^0)$ – суммарная составляющая магнитного поля; $H_x^0(M^0)$ – составляющая магнитного поля слоистой среды в отсутствие неоднородности; $k_{ji}^2=i\omega\mu_0\sigma_{ji}$, $k_i^2=i\omega\mu_0\sigma_i$, σ_{ji} – проводимость внутри неоднородности, расположенной в j-м слое; σ_i – проводимость i-го слоя N-слойной среды. Функция Грина $G_m(M,M^0)$ в выражениях (36) удовлетворяет уравнению аналогичному (27) с $\tilde{k}^2(M)=k_i^2$, введенному выше. Граничные условия состоят в непрерывности самой функции на границах раздела слоев, однако нормальная производная ее терпит разрыв вида

$$\frac{1}{k_i^2}\frac{\partial G_{mi}}{\partial n}-\frac{1}{k_{i+1}^2}\frac{\partial G_{mi+1}}{\partial n}\Big|_{z=L_i}. \tag{37}$$

Сопоставим полученные уравнения для сейсмической и электромагнитной задачи:

$$\begin{gathered}\varphi(M^0)=\frac{(k_{1ji}^2-k_{1j}^2)}{2\pi}\iint\limits_{S_C}\varphi(M)G_{Sp,j}(M,M^0)d\tau_M+\\+\frac{(\sigma_{ji}-\sigma_{ja})}{\sigma_{ji}2\pi}\oint\limits_C G_{Sp,j}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dc+\frac{\sigma_{ja}}{\sigma_{ji}}\varphi^0(M^0),M^0\in S_C;\\ H_x(M^0)=\frac{k_{ji}^2-k_j^2}{2\pi}\iint\limits_{S_C}H_x(M)G_m(M,M^0)d\tau_M+\\+\frac{k_{ji}^2-k_j^2}{k_j^2 2\pi}\oint\limits_C H_x(M)\frac{\partial G_m}{\partial n}dc+\frac{k_{ji}^2}{k_j^2}H_x^0(M^0),M^0\in S_C.\end{gathered} \tag{38}$$

Различие в граничных условиях для сейсмической и электромагнитной задач приводит к различному типу уравнений: в сейсмическом случае – к интегродифференциальному уравнению, в электромагнитном случае – к нагруженному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Если при решении прямой электромагнитной и сейсмической задач в динамическом варианте удается установить подобие в явных выражениях для составляющих электромагнитного и сейсмического полей при определенных типах их возбуждения, то с усложнением структуры среды, как показывает полученный результат при анализе сейсмических данных, связанных с решением для продольных упругих колебаний, подобие исчезает. Это означает, что сейсмическая информация является дополнительной к электромагнитной информации о структуре и тем более о состоянии среды.

4. Алгоритм моделирования дифракции линейно поляризованной упругой поперечной волны на двумерной неоднородности, расположенной в *j*-м слое *N*-слойной среды

Рассмотрим задачу о дифракции линейно поляризованной упругой поперечной волны на двумерной неоднородности, расположенной в j-м слое N-слойной среды, используя подход, описанный в работе [3] для электромагнитной двумерной задачи (случай Н-поляризации). Геометрическая модель среды аналогична описанной выше в предыдущей задаче. В этом случае в уравнении (5) F_y, F_z равны нулю,

$$u_z=u_y=0, \tag{39}$$

а составляющая вдоль оси OX не зависит от x. Составляющие тензора напряжения (13):

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=0;\tau_{xy}=\mu\frac{\partial u_x}{\partial y};\ \tau_{xz}=\mu\frac{\partial u_x}{\partial z};\ \tau_{yz}=0. \tag{40}$$

Тогда наша задача с учетом (8), сводится к решению следующей задачи:

$$\Delta u_{xi}+k_{2i}^2u_{xi}=-2\pi f_i(M);\ \ f_i(M)=\frac{\sigma_i}{2\pi\mu_i}F_{xi}, \tag{41}$$

где $i=1,\ldots,n$; $F_{xi}=F$ при $i=1$, при $i\neq1$ $F_{xi}=0$. Волновое число в i-м слое равно согласно (3):

$$k_{2i}^2=k_1^2=\omega^2\frac{\sigma_i}{\mu_i}. \tag{42}$$

Введем обозначение:

$\tilde{k}(M)=k_{2i}$ – волновое число в слоистой среде, $i=1,\ldots,n$ и

$$K(M)=\begin{cases}k_{2ji},\ M\in S_0;\\ \tilde{k}(M),\ M\notin S_0;\end{cases}\qquad k_{2ji}^2=\omega^2\frac{\sigma_{ji}}{\mu_{ji}}. \tag{43}$$

Индекс ji, как и в предыдущей задаче указывает на свойства среды внутри неоднородности. В общем случае в произвольном слое или внутри неоднородности уравнение (41) с учетом (42) и (43) будет иметь вид

$$\Delta u_{xi}+K^2(M)u_{xi}=-2\pi f_i(M). \tag{44}$$

Граничные условия, заключающиеся в непрерывности вектора смещения и тензора напряжений на всех границах раздела, сводятся к непрерывности u_{xi} и $\mu_i\frac{\partial u_{xi}}{\partial n}$. Выполнены условия затухания на бесконечности.

Пусть

$$\tilde{u}_{xi}=u_{xi}-u_{xi}^0, \tag{45}$$

где $i=1,\ldots,j,ji,\ldots,n$; u_{xi}^0 – составляющая нормального сейсмического поля в слоистой среде в отсутствие неоднородности: $u_{ji}^0=u_j^0$ и

$$\Delta u_{xi}^0+k_{2i}^2u_{xi}^0=-2\pi f_i(M); \tag{46}$$

$$\mu_i\frac{\partial u_{xi}^0}{\partial z}-\mu_{i+1}\frac{\partial u_{x,i+1}^0}{\partial z}=0\Big|_{z\in L_i};\ u_{xi}^0-u_{x,i+1}^0=0\Big|_{z\in L_i}. \tag{47}$$

На контуре неоднородности u_x^0 и $\frac{\partial u_x^0}{\partial n}$ непрерывны. $\tilde{u}_{xi}$ – составляющая аномального сейсмического поля, которая, как легко показать аналогично (24), удовлетворяет уравнению

$$\Delta\tilde{u}_{xi}+K^2(M)\tilde{u}_{xi}=-(K^2(M)-\tilde{k}^2(M))\tilde{u}^0_{xi} \qquad (48)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned}&\mu_i\frac{\partial\tilde{u}_{x,i}}{\partial z}-\mu_{i+1}\frac{\partial\tilde{u}_{x,i+1}}{\partial z}=0\Big|_{z\in L_i};\\&\tilde{u}_{x,i}-\tilde{u}_{x,i+1}=0\Big|_{z\in L_i};\ u_x\big|_{z=0}=0;\\&\left(\mu\frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial n}\right)_{ji}-\left(\mu\frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial n}\right)_{ja}=(\mu_{ji}-\mu_{ja})\frac{\partial u^0_{x,j}}{\partial n};\\&\tilde{u}_{x,ji}-\tilde{u}_{x,ja}=0.\end{aligned} \qquad (49)$$

Функцию источника сейсмического поля $G_{Ssi}(M,M^0)$ выберем следующим образом: она определяется как решение следующей краевой задачи:

$$\Delta G_{Ssi}+\tilde{k}^2G_{Ssi}(M,M^0)=-2\pi\delta(M-M^0) \qquad (50)$$

и удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{aligned}&\mu_i\frac{\partial G_{Ss,i}}{\partial z}-\mu_{i+1}\frac{\partial G_{Ss,i+1}}{\partial z}=0\Big|_{z\in L_i};\\&G_{Ss}\big|_{z=0}=0;\ G_{Ss,i}-G_{Ss,i+1}=0\Big|_{z\in L_i}.\end{aligned} \qquad (51)$$

На контуре неоднородности $G_{Ss}(M,M^0)$ и $\dfrac{\partial G_{Ss}(M,M^0)}{\partial n}$ непрерывны. Применим формулу Грина [3] для функций $\tilde{u}_{xi}$ и $G_{Ss}(M,M^0)$ для каждого слоя N-слойной среды при $i\neq j$:

$$\int_{L_i}\left(\tilde{u}_{xi}\frac{\partial G_{Ss,i}}{\partial n}-G_{Ss,i}\frac{\partial\tilde{u}_{xi}}{\partial n}\right)dl_i-\int_{L_{i+1}}\left(\tilde{u}_{x,i+1}\frac{\partial G_{Ss,i+1}}{\partial n}-G_{Ss,i+1}\frac{\partial\tilde{u}_{x,i+1}}{\partial n}\right)dl_{i+1}=\begin{cases}2\pi\tilde{u}_{xi}(M^0),\ M^0\in S_i;\\0,\ M^0\notin S_i.\end{cases} \qquad (52)$$

При $i=j$

$$\int_{Lji}\left(\tilde{u}_{x,j}\frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n}-G_{Ss,j}\frac{\partial\tilde{u}_{x,j}}{\partial n}\right)dl_j-\int_{L_{j+1}}\left(\tilde{u}_{x,j+1}\frac{\partial G_{Ss,j+1}}{\partial n}-G_{Ss,j+1}\frac{\partial\tilde{u}_{x,j+1}}{\partial n}\right)dl_{j+1}+\oint_{C_{ja}}\left(\tilde{u}_{x,ja}\frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n}-G_{Ss,j}\frac{\partial\tilde{u}_{x,ja}}{\partial n}\right)dc_{ja}=\begin{cases}2\pi\tilde{u}_{x,j}(M^0),M^0\in S_j-S_C;\\0,\ M^0\notin S_j-S_C.\end{cases} \qquad (53)$$

Помножим выражения (52) и (53) на μ_i и сложим их с учетом граничных условий (49) и (51), в результате чего получим:

$$\frac{\mu_{ja}}{2\pi}\oint_{C_{ja}}\left(\tilde{u}_{x,ja}\frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n}-G_{Ss,j}\frac{\partial\tilde{u}_{x,ja}}{\partial n}\right)dc_{ja}=\begin{cases}\mu(M^0)\tilde{u}_x(M^0),\ M^0\in S_j-S_C;\\0,\ M^0\notin S_j-S_C;\end{cases}\quad \mu_{ja}=\mu_j. \qquad (54)$$

Применим формулу Грина для функций $\tilde{u}_{x,ji}$ и $G_{Ss,j}(M,M^0)$ для внутренности области S_C, с учетом (44), (46), (48), (50) получим:

$$\frac{k^2_{2ji}-k^2_{2j}}{2\pi}\iint_{S_C}u_x(M)G_{Ss,j}(M,M^0)d\tau_M-\frac{1}{2\pi}\oint_{C_{ji}}\left(\tilde{u}_{xji}\frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n}-G_{Ss,j}\frac{\partial\tilde{u}_{x,ji}}{\partial n}\right)dc_{ji}=\begin{cases}\tilde{u}_x(M^0),\ M^0\in S_C;\\0,\ M^0\notin S_C.\end{cases} \qquad (55)$$

Помножим выражение (55) на μ_{ji} и сложим с (54), с учетом граничных условий на контуре неоднородности получим:

$$\frac{\mu_{ji}(k^2_{2ji}-k^2_{2j})}{2\pi}\iint_{S_C}u(M)G_{Ss,j}(M,M^0)d\tau_M-\frac{(\mu_{ja}-\mu_{ji})}{2\pi}\oint_C u^0_x(M)\frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n}dc+\frac{(\mu_{ja}-\mu_{ji})}{2\pi}\oint_C u_x\frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n}dc+\frac{(\mu_{ja}-\mu_{ji})}{2\pi}\oint_C G_{Ss,j}\frac{\partial u^0_x}{\partial n}dc=\mu(M^0)\tilde{u}_x(M^0). \qquad (56)$$

Воспользуемся равенством [2]

$$-\frac{(\mu_{ja}-\mu_{ji})}{2\pi}\oint_C\left(u^0_x(M)\frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n}-G_{Ss,j}\frac{\partial u^0_x(M)}{\partial n}\right)dc=\begin{cases}(\mu_{ja}-\mu_{ji})u^0_x(M^0),\ M^0\in S_C;\\0,\ M^0\notin S_C.\end{cases} \qquad (57)$$

Тогда выражение (56) с учетом (57) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{(k^2_{2ji}-k^2_{2j})}{2\pi}\iint_{S_C}u_x(M)G_{Ss,j}(M,M^0)d\tau_M+\frac{\mu_{ja}}{\mu_{ji}}u^0_x(M^0)+\frac{(\mu_{ja}-\mu_{ji})}{\mu_{ji}2\pi}\oint_C u_x(M)\frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n}dc=u_x(M^0),\ M^0\in S_C;\\&\frac{\mu_{ji}(k^2_{2ji}-k^2_{2j})}{\mu(M^0)2\pi}\iint_{S_C}u_xM)G_{Ss,j}(M,M^0)d\tau_M+u^0_x(M^0)+\frac{(\mu_{ja}-\mu_{ji})}{\mu(M^0)2\pi}\oint_C u_x(M)\frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n}dc=u_x(M^0),\ M^0\notin S_C.\end{aligned} \qquad (58)$$

В выражениях (58) выписан алгоритм моделирования сейсмического поля для поперечных упругих колебаний в N-слойной среде, содержащей двумерную неоднородность. Первое выражение есть интегральное нагруженное уравнение Фредгольма второго рода, решением которого является распределение составляющей вектора упругих смещений для поперечных колебаний внутри неоднородности. Второе выражение есть интегральное представление для вычисления вектора упругих смещений в любом слое N-слойной среды.

5. Сопоставление алгоритмов для сейсмического (линейно поляризованная поперечная упругая волна) и электромагнитного двумерного моделирования (Н-поляризация)

Сопоставляя выражения (58) с соответствующими выражениями для электромагнитного поля (Н-поляризация) (36) мы видим наличие подобия интегральных структур этих выражений. Различие имеется в коэффициентах при соответствующих членах в выражениях (36) и (58), что можно учесть в выборе системы наблюдения того или иного поля. Следует учесть также различие в частотной зависимости отклика среды на сейсмическое и электромагнитное возбуждения. Однако при соблюдении коэффициентов подобия сейсмическое поле, возбуждаемое поперечными колебаниями, и электромагнитное поле будут содержать подобную информацию о структуре неоднородной среды и связанном с ней состоянии. Эти результаты подтверждаются натурными экспериментами, изложенными в работах [9, 12].

Заключение

Предложен алгоритм решения прямой двумерной задачи для сейсмического поля в динамическом варианте при возбуждении источниками продольных и поперечных колебаний в виде интегро-дифференциального (в первом случае) и нагруженного интегрального уравнения Фредгольма второго рода (во втором случае) для решения внутренней задачи и соответствующих интегро-дифференциальных и интегральных представлений для решения внешней задачи. Произведено сопоставление полученных алгоритмов с алгоритмом решения прямой задачи для дифракции электромагнитного поля на двумерных неоднородностях, полученного В.И. Дмитриевым [3] (Н-поляризация). Показано, что для более сложных, чем горизонтально-слоистые структуры геологических сред, подобие электромагнитной задачи и сейсмической для продольных колебаний нарушается. Следовательно, эти наблюдения позволяют получить взаимно дополнительную информацию о структуре и тем более о состоянии среды. Эти поля различным образом отражают особенности неоднородных структур и реагируют на изменение их состояния. При возможности прослеживания сейсмических возмущений в виде колебаний только сдвигового типа и наблюдений магнитной составляющей электромагнитного поля Н-поляризации в двумерной среде установлено их подобие, что может быть использовано при построении совместных систем наблюдения.

Литература

1. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – 426 с.

2. Купрадзе, В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения / В.Д. Купрадзе. – М.; Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. – 280 с.

3. Дмитриев, В.И. Дифракция плоского электромагнитного поля на цилиндрических телах, расположенных в слоистых средах / В.И. Дмитриев // Вычислительные методы и программирование в слоистых средах. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – Вып. III. – С. 307–316.

4. Хачай, А.Ю. Изучение критерия подобия сейсмических и электромагнитных полей от погруженных сингулярных источников для осуществления активного мониторинга нестационарной среды / А.Ю. Хачай // Глубинное строение, геодинамика, мониторинг. Тепловое поле Земли. Интерпретация геофизических полей: материалы Третьих науч. чтений Ю.П. Булашевича. – Институт геофизики УрО РАН, 2005. – С. 143–145.

5. Хачай, А.Ю. Алгоритм решения прямой задачи электромагнитных исследований при возбуждении горизонтальным магнитным диполем, расположенным в произвольном слое n-слойной изотропной проводящей среды / А.Ю. Хачай // Информатика и математическое моделирование. – Екатеринбург, 2006. – С. 136–168.

6. Хачай, А.Ю. Алгоритм решения прямой динамической задачи сейсмики при возбуждении горизонтальной точечной силой, расположенной в произвольном слое N-слойной упругой изотропной среды / А.Ю. Хачай // Информатика и математическое моделирование. – Екатеринбург, 2006. – С. 170–278.

7. Хачай, А.Ю. Алгоритм решения прямой динамической задачи сейсмики при возбуждении точечным источником вертикальной силы, расположенной в произвольном слое N-слойной упругой изотропной среды / А.Ю. Хачай // Информатика и математическое моделирование. – Екатеринбург, 2006. – С. 279–310.

8. Использование комплексной попланшетной сейсмической и электромагнитной методик для решения задач картирования приповерхностных неоднородностей / О.А. Хачай, В.С. Дружинин, Ю.С. Каретин и др. // Геофизика XXI столетия: 2001 г.: сб. тр. третьих геофизических чтений им. В.В. Федынского. – М.: Научный Мир, 2001. – С. 327–337.

9. Хачай, О.А. Изучение критерия подобия для сейсмических и электромагнитных исследований в *частотно-геометрическом варианте / О.А. Хачай, Т.А. Хинкина, В.В. Бодин // Астрономо-геодезические исследования. – Екатеринбург: УрГУ. – 2001. – С. 30–35.*

10. Трехмерный электромагнитный мониторинг состояния массива горных пород / О.А. Хачай, Н.П. Влох, Е.Н. Новгородова и др. // Физика Земли. – 2000. – № 12. – С. 1–8.

11. Хачай, О.А. Предпосылки сейсмоэлектромагнитного мониторинга нестационарной среды / О.А. Хачай, Т.А. Хинкина, В.В. Бодин // Российский геофизический журнал. – 2000. – № 17–18. – С. 83–89.

12. Метод картирования зон потенциальной неустойчивости массива горных пород различного вещественного состава с использованием данных динамической сейсмики и электромагнитных индукционных исследований / О.А. Хачай, В.В. Бодин, Е.Н. Новгородова и др. // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2001. – № 3. – С. 10–16.

13. Хачай, О.А. Исследование разрешающей способности попланшетной электромагнитной методики для активного картирования и мониторинга неоднородных геоэлектрических сред / О.А. Хачай, Е.Н. Новгородова, А.Ю. Хачай // Физика Земли. – 2003. – № 1. – С. 30–41.

Поступила в редакцию 13 февраля 2010 г.