

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РАБОТЫ МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ПЛОТНОСТЕЙ И ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА МЕЖДУ СЛОЯМИ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В РЕЗЕРВУАРЕ

Е.Н. Абросимов, А.Л. Шестаков

THE ACCURACY IMPROVING OF THE METHOD OF MEASUREMENT OF THE DENSITIES AND THE INTERFACE BETWEEN LAYERS OF TWO-LAYER LIQUID IN THE TANK

E.N. Abrosimov, A.L. Shestakov

Предлагается алгоритм повышения точности работы метода измерения плотностей и положения границы раздела между слоями двухслойной жидкости, основанный на применении фильтрации Калмана. Приводятся результаты моделирования работы предлагаемого алгоритма.

Ключевые слова: измерение плотности, измерение уровня, определение положения границы между слоями, фильтр Калмана.

The article proposes an algorithm of accuracy improving of method of measuring densities of two-layer liquid and interface position between layers, based on application of Kalman filtering. Simulation results of the proposed algorithm are given.

Keywords: density measurement, level measurement, position estimation of interface between layers, the Kalman filter.

Введение

Задача измерения плотностей двухслойной жидкости и положения границы раздела между слоями является распространенной в различных практических приложениях.

В работе [1] предложен метод измерения плотностей и границы раздела между слоями двухслойной жидкости в резервуаре, главным достоинством которого является применение всего двух датчиков давления для измерения как плотностей слоев, так и положения границы раздела между слоями. Одним из недостатков предложенного способа является отсутствие фильтрации шумов применяемых датчиков давления.

В процессе измерения в данных с датчиков будет неизбежно присутствовать шум, вызванный различными факторами. Для того чтобы повысить точность измерения, предлагается использовать фильтрацию с помощью рекуррентного алгоритма, основанного на методе фильтра Калмана [2].

1. Начальные условия

Рассмотрим резервуар с двухслойной жидко-

стью, которая занимает весь объем резервуара. Примем, что начало координат находится в верхней граничной плоскости резервуара (рис. 1).

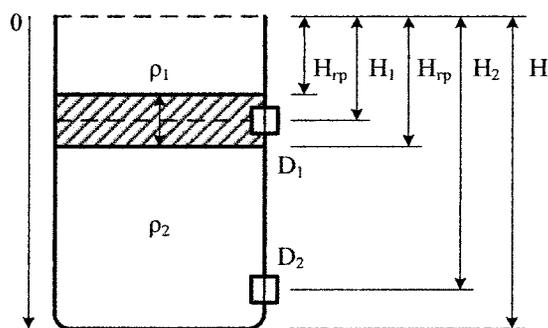


Рис. 1. Резервуар с двумя датчиками давления

На резервуаре закреплены два датчика давления D_1 и D_2 . Датчик давления D_2 расположен у дна резервуара, а датчик D_1 находится на уровне некоторого среднего значения, относительно которого колеблется положение границы раздела между слоями.

Абросимов Евгений Николаевич – ассистент кафедры информационно-измерительной техники ЮУрГУ; abrosimov@init.susu.ac.ru

Шестаков Александр Леонидович – д-р техн. наук, профессор, ректор ЮУрГУ; admin@urc.ac.ru

Abrosimov Evgeniy Nikolaevich – assistant lecturer of the Equipment for information and measuring department of SUSU; abrosimov@init.susu.ac.ru

Shestakov Aleksandr Leonidovich – PhD, professor, rector of SUSU; admin@urc.ac.ru

За счет колебаний границы раздела между слоями датчик D_1 попеременно оказывается то в верхнем слое и будет измеряться плотность ρ_1 , то в нижнем слое и будет измеряться плотность ρ_2 .

На рис. 1 заштрихованная полоса обозначает интервал, в котором колеблется граница раздела между слоями. Согласно [1] плотности слоев и положение границы раздела будут определяться следующими зависимостями:

$$\rho_1 = \frac{P_1 - P_{\text{атм}}}{gH_1}, \quad (1)$$

$$\rho_2 = \frac{P_2 - P_1}{g(H_2 - H_1)}, \quad (2)$$

$$H_{\text{гр}} = \frac{\rho_2 g H_2 - P_2 + P_{\text{атм}}}{g(\rho_2 - \rho_1)}. \quad (3)$$

Из анализа погрешностей [1] следует, что наибольшее влияние шум в данных с датчиков давления будет оказывать на погрешность определения плотностей слоев, в то время как точность определения положения границы раздела будет в большей степени зависеть от разности плотностей. В связи с этим возникает задача восстановления с максимальной точностью плотностей слоев ρ_1 и ρ_2 по данным с датчиков давления D_1 и D_2 .

Определим связи между переменными и запишем их в матричном виде:

$$P_1 = gH_1 \cdot \rho_1 + P_{\text{атм}};$$

$$P_2 = g(H_2 - H_1) \cdot \rho_2 + gH_1 \cdot \rho_1 + P_{\text{атм}},$$

отсюда

$$\begin{cases} P_1 - P_{\text{атм}} = gH_1 \cdot \rho_1 + 0 \cdot \rho_2; \\ P_2 - P_{\text{атм}} = gH_1 \cdot \rho_1 + g(H_2 - H_1) \cdot \rho_2; \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 - P_{\text{атм}} \\ P_2 - P_{\text{атм}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gH_1 & 0 \\ gH_1 & g(H_2 - H_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Эта матричная запись справедлива в условиях отсутствия шумов.

2. Стохастические уравнения, описывающие ход технологического процесса

Для использования фильтра Калмана необходимо описать технологический процесс в виде стохастических дифференциальных или разностных уравнений, которые дают представление о нормальном ходе процесса. Отклонение от нормального хода процесса принимается случайным и считается шумом процесса.

Будем считать, что типичное поведение параметров ρ_1 и ρ_2 – медленное изменение, приближенно линейное во времени. Так как измерения производятся один раз в единицу дискретного времени k , наши уравнения естественно записать как разностные (дискретные), используя подход, предложенный в работе [3] для определения плотности и уровня однослойной жидкости:

$$\begin{cases} \rho_{1,k} - \rho_{1,k-1} = \Delta\rho_1 \\ \rho_{1,k+1} - \rho_{1,k} = \Delta\rho_1 \\ -\rho_{1,k-1} + \omega_{1,k}; \end{cases} \Rightarrow \rho_{1,k+1} = 2\rho_{1,k} - \rho_{1,k-1} + \omega_{1,k}; \quad (5)$$

$$\begin{cases} \rho_{2,k} - \rho_{2,k-1} = \Delta\rho_2 \\ \rho_{2,k+1} - \rho_{2,k} = \Delta\rho_2 \\ -\rho_{2,k-1} + \omega_{2,k}. \end{cases} \Rightarrow \rho_{2,k+1} = 2\rho_{2,k} - \rho_{2,k-1} + \omega_{2,k}. \quad (6)$$

Здесь индекс k нумерует дискретные моменты времени; $\omega_{1,k}$ и $\omega_{2,k}$ — шумы процесса. В отсутст-

вие этих шумов переменные ρ_1 и ρ_2 зависели бы от k строго линейно. К шумам процесса отнесем все факторы, вызывающие отклонения хода изменения величин ρ_1 и ρ_2 от линейности. Поскольку характеристики этих шумов могут быть описаны лишь приближенно, примем, что шумы $\omega_{1,k}$ и $\omega_{2,k}$ имеют нормальное распределение с нулевыми математическими ожиданиями и среднеквадратичными отклонениями σ_{ρ_1} , σ_{ρ_2} соответственно.

Уравнения для $\rho_{1,k}$ и $\rho_{2,k}$ – это два линейных разностных уравнения второго порядка. Стандартная схема фильтра Калмана предполагает запись их в виде матричного уравнения первого порядка. Для этого составим систему:

$$\begin{cases} \rho_{1,k+1} = 2 \cdot \rho_{1,k} - \rho_{1,k-1} + \omega_{1,k}; \\ \rho_{1,k} = \rho_{1,k} - 0 \cdot \rho_{1,k-1} + 0 \cdot \omega_{1,k}; \\ \rho_{2,k+1} = 2 \cdot \rho_{2,k} - \rho_{2,k-1} + \omega_{2,k}; \\ \rho_{2,k} = \rho_{2,k} - 0 \cdot \rho_{2,k} + 0 \cdot \omega_{2,k}. \end{cases} \quad (7)$$

Запишем ее в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \rho_{1,k+1} \\ \rho_{1,k} \\ \rho_{2,k+1} \\ \rho_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{1,k} \\ \rho_{1,k-1} \\ \rho_{2,k} \\ \rho_{2,k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{1,k} \\ 0 \\ \omega_{2,k} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Введем обозначения:

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} \rho_{1,k+1} \\ \rho_{1,k} \\ \rho_{2,k+1} \\ \rho_{2,k} \end{bmatrix} - \text{вектор состояния в момент}$$

времени $k+1$;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \text{матрица эволюции}$$

вектора состояния X_k в отсутствие шумов;

$$X_k = \begin{bmatrix} \rho_{1,k} \\ \rho_{1,k-1} \\ \rho_{2,k} \\ \rho_{2,k-1} \end{bmatrix} - \text{вектор состояния в момент}$$

времени k ;

$$W_k = \begin{bmatrix} \omega_{1,k} \\ 0 \\ \omega_{2,k} \\ 0 \end{bmatrix} - \text{вектор шума процесса.}$$

В результате система (7) в матричном виде запишется следующим образом:

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + W_k. \quad (9)$$

3. Уравнения, описывающие процесс измерения

Уравнение (9) – это уравнение процесса. Добавим к нему уравнение измерения, полученное из выражения (4) с использованием введенного вектора X_k и с учетом шумов измерения:

$$\begin{cases} P_{1,k} - P_{\text{атм}} = gH_1 \cdot \rho_{1,k} + 0 \cdot \rho_{1,k-1} + \\ \quad + 0 \cdot \rho_{2,k} + 0 \cdot \rho_{2,k-1}; \\ P_{2,k} - P_{\text{атм}} = gH_1 \cdot \rho_{1,k} + 0 \cdot \rho_{1,k-1} + \\ \quad + g(H_2 - H_1) \cdot \rho_{2,k} + 0 \cdot \rho_{2,k-1}; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} P_{1,k} - P_{атм} \\ P_{2,k} - P_{атм} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gH_1 0 & 0 & 0 \\ gH_1 0 & g(H_2 - H_1) & 0 \end{bmatrix} \cdot X_k + \begin{bmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Введем следующие обозначения:

$$Y_k = \begin{bmatrix} P_{1,k} - P_{атм} \\ P_{2,k} - P_{атм} \end{bmatrix} - \text{вектор результатов измерения};$$

$$C = \begin{bmatrix} gH_1 & 0 & 0 \\ gH_1 & 0 & g(H_2 - H_1) \end{bmatrix} - \text{матрица наблюдения};$$

$$V_k = \begin{bmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \end{bmatrix} - \text{вектор шума измерения}.$$

В итоге система (10) в матричном виде запишется следующим образом:

$$Y_k = C \cdot X_k + V_k. \quad (12)$$

В результате получим динамическую стохастическую систему:

$$\begin{cases} X_{k+1} = A \cdot X_k + W_k; \\ Y_k = C \cdot X_k + V_k. \end{cases} \quad (13)$$

4. Синтез фильтра Калмана

На первом этапе синтеза фильтра зададим начальные значения параметров вектора состояния X_0 и матрицы ковариации P_0 .

$$\hat{X}_0 = \begin{bmatrix} \rho_{1,0} \\ \rho_{1,0} \\ \rho_{2,0} \\ \rho_{2,0} \end{bmatrix} \quad (14)$$

– оценка вектора состояния в начальный момент времени.

Этот вектор состоит из величин $\rho_{1,0}$ и $\rho_{2,0}$, вычисленных согласно формулам (1) и (2) по данным датчиков давления в начальный (нулевой) момент времени, то есть

$$\rho_{1,0} = \frac{P_{1,0} - P_{атм}}{gH_1}, \quad (15)$$

$$\rho_{2,0} = \frac{P_{2,0} - P_{1,0}}{g(H_2 - H_1)}. \quad (16)$$

Примем, что в начальный момент времени в резервуаре находились оба слоя жидкости, граница раздела хотя бы 1 раз перешла через верхний датчик давления.

Определимся с начальными значениями элементов ковариационной матрицы ошибок оценивания вектора состояния в начальный момент времени. В общем виде ковариационная матрица P_0 определяется выражением[2]:

$$P_0 = M[(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T], \quad (17)$$

где X_0 – истинное значение вектора состояния в начальный момент времени. Элементами вектора $X_0 - \hat{X}_0$ будут являться среднеквадратические отклонения погрешностей определения плотностей слоев в начальный момент времени. Тогда ковариационная матрица P_0 запишется в виде

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{\rho_{1,0}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\rho_{1,0}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\rho_{2,0}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\rho_{2,0}}^2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где $\sigma_{\rho_{1,0}}^2$ и $\sigma_{\rho_{2,0}}^2$ – априорные значения дисперсий плотностей в начальный момент времени.

С ростом числа итераций k матрица ковариации вектора состояния P_k быстро стабилизируется и перестает зависеть от своего начального значения.

Задав начальные значения, можно осуществить прогнозирование ожидаемых значений матриц фильтра Калмана. Прогнозируем вектор состояния X_k по X_{k-1} и ковариационную матрицу P_k по P_{k-1} :

$$\hat{X}_{k+1} = A \cdot \hat{X}_k; \quad (19)$$

$$\hat{P}_{k+1} = A \cdot P_k \cdot A^T + Q, \quad (20)$$

где Q – ковариационная матрица шума процесса, которая характеризует влияние шумов друг на друга, то есть характеризует отклонение процесса от линейности. Эта матрица определяется следующим образом:

$$Q = M[W_k W_k^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{\rho_{1,k}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\rho_{2,k}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где $\sigma_{\rho_{1,k}}^2$ и $\sigma_{\rho_{2,k}}^2$ – дисперсии погрешностей определения плотности слоев. Так как шумы процесса $\omega_{1,k}$ и $\omega_{2,k}$ независимы, все недиагональные элементы матрицы Q равны нулю.

Следующим этапом синтеза фильтра является корректировка прогнозируемых значений. Для этого необходимо вычислить оптимальную матрицу усиления фильтра (коэффициент Калмана)[2]:

$$U_k = \hat{P}_k \cdot C^T \cdot [C \cdot \hat{P}_k \cdot C^T + R]^{-1}, \quad (22)$$

где R – ковариационная матрица шума измерения, которая характеризует влияние погрешностей датчиков давления друг на друга,

$$R = M[V_k V_k^T] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где σ_1^2 и σ_2^2 – дисперсии погрешностей датчиков давления.

Обновим оценку для среднего значения вектора состояния по новым результатам измерения Y_k :

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k + U_k \cdot [Y_k - C \cdot \hat{X}_k] \quad (24)$$

и оценку для матрицы ковариации:

$$P_k = \hat{P}_k - U_k \cdot C \cdot \hat{P}_k. \quad (25)$$

В процессе работы фильтра с увеличением числа итераций k матрицы P_k и U_k стабилизируются, что говорит о сходимости фильтра Калмана. Установившиеся значения этих матриц будут зависеть от матриц R , Q и A .

5. Численное моделирование работы алгоритма и фильтра Калмана

Предложенный алгоритм повышения точности работы метода измерения плотностей слоев и границы раздела между слоями двухслойной жидкости был смоделирован в пакете Matlab 7.7.0 с начальными условиями:

- высота резервуара 500 см;
- первый датчик погружен на глубину 250 см;
- второй датчик погружен на глубину 350 см;
- граница раздела находится на глубине 250 см;

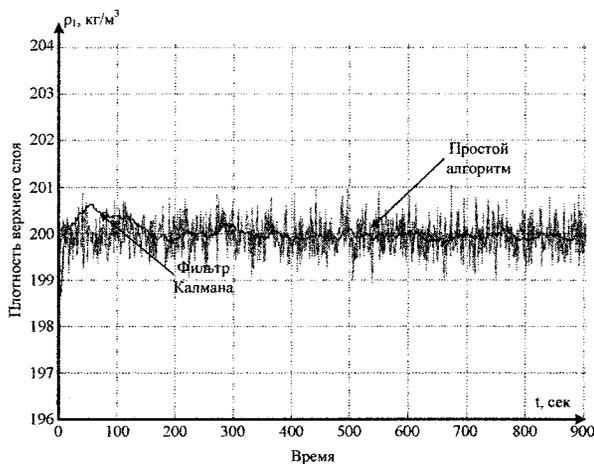


Рис. 2. Плотность ρ_1 верхнего слоя

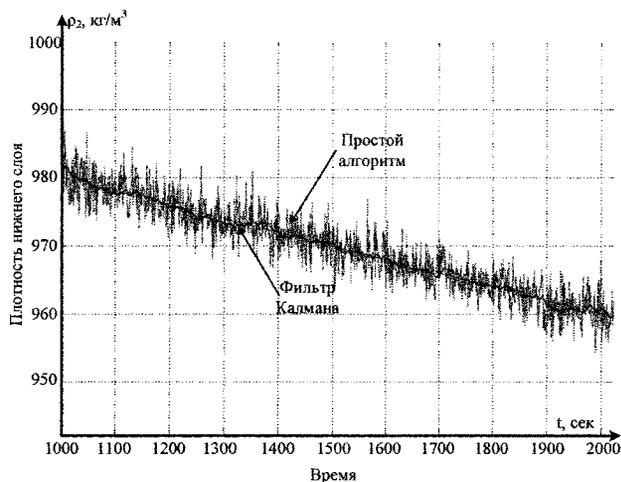


Рис. 3. Плотность ρ_2 нижнего слоя

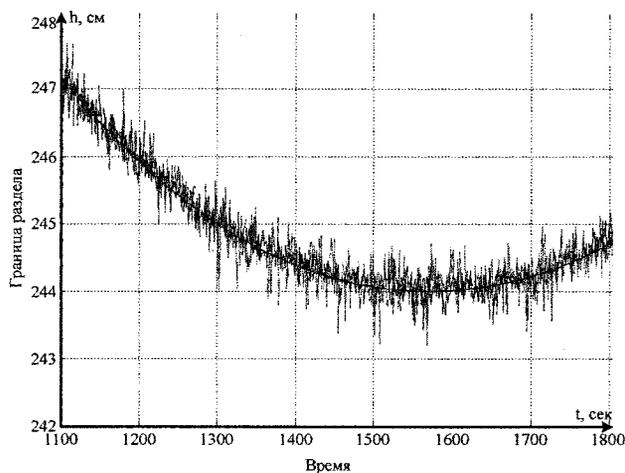


Рис. 4. Положение границы раздела $H_{гр}$ между слоями

- плотность верхнего слоя 200 кг/м^3 и остается постоянной;
- плотность нижнего слоя 1000 кг/м^3 и за время моделирования уменьшается до 900 кг/м^3 ;
- время моделирования 5000 с ;
- предполагалось, что погрешности датчиков представляют собой белый шум с амплитудой 2% от предельного значения показания датчиков;
- положение границы раздела слоев задавалось выражением

$$H_{гр} = 10(\sin(0,003t) + 0,4 \cos(0,004t)),$$

где t – время, с.

На рис. 2–4 представлены графики результатов моделирования, где сплошные линии – это заданные функции изменения параметров.

- По результатам моделирования определили, что
- СКО плотности ρ_1 верхнего слоя $\sigma_{\rho_1} = 1,59 \text{ кг/м}^3$;
- СКО плотности ρ_1 верхнего слоя с использованием фильтра Калмана $\sigma_{\rho_1}^K = 0,46 \text{ кг/м}^3$;
- СКО плотности ρ_2 нижнего слоя $\sigma_{\rho_2} = 10,71 \text{ кг/м}^3$;
- СКО плотности ρ_2 нижнего слоя с исполь-

зованием фильтра Калмана $\sigma_{\rho_2}^K = 2,97 \text{ кг/м}^3$;

- СКО положения границы раздела $\sigma_{H_{гр}} = 6,29 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;
- СКО положения границы раздела, рассчитанное по отфильтрованным плотностям ρ_1 и ρ_2 , $\sigma_{H_{гр}}^K = 6,24 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Значения СКО σ_{ρ_1} , σ_{ρ_2} и $\sigma_{H_{гр}}$ рассчитывались по простому методу, предложенному в [1]. Для всех параметров смещение математического ожидания отсутствует.

Результаты проведенного моделирования показывают, что применение рекуррентного алгоритма, основанного на фильтре Калмана, приводит к существенному повышению точности измерения.

Заключение

Предложен алгоритм повышения точности работы метода измерения плотностей слоев и границы раздела между слоями двухслойной жидкости, основанный на применении фильтрации Калмана. Приведены результаты моделирования

предложенного алгоритма, которые подтверждают его работоспособность и более высокую точность по сравнению с расчетами этих параметров прямым методом.

Литература

1. Абросимов, Е.Н. Измерение плотностей и границы раздела между слоями двухслойной жидкости в резервуаре / Е.Н. Абросимов, А.Л. Шестаков // *Статья в данном вестнике.*

2. Браммер, К. *Фильтр Калмана–Бьюси. Детерминированное наблюдение и стохастическая фильтрация* / К. Браммер, Г. Зиффлинг. – М.: Наука, 1982.

3. *Применение фильтра Калмана в задаче измерения уровня и плотности жидкости с помощью двух датчиков давления* / О.Л. Ибряева, И.Г. Корепанов, А.С. Семенов, А.Л. Шестаков // *Информационно-измерительная техника.* – 2007.

Поступила в редакцию 18 ноября 2010 г.