ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ПРИ ОЦЕНКЕ РИСКА НЕВОЗВРАТА ССУДЫ

О.О. Павловская, П.С. Лукичев

В условиях экономического кризиса, когда возрастает неопределенность выполнения контрагентом финансовых обязательств по возврату заемных средств, задача управления кредитным риском становится особенно актуальной. В связи с возросшими масштабами распространения риска невозврата ссуды (одной из разновидностей внутреннего кредитного риска по основной деятельности), возникает необходимость анализа возможности и эффективности использования для его количественной оценки известных методов оценки кредитных рисков.

Традиционно для оценки рисков применяются статистические методы, суть которых – изучение статистики потерь и прибылей, имевших место при принятии аналогичных решений, установлении величины и частоты получения той или иной экономической отдачи, а затем проведения вероятностного анализа и составления прогноза будущего поведения на рынке.

Так, в настоящее время некоторые российские банки оценивают кредитные риски на основании VAR-методики (value-at-risk – стоимость, подверженная риску), которая при хороших исходных условиях ее применения, позволяет переходить от оценки отдельных рисков к анализу совокупного риска бизнеса [3].

Анализ основных методов расчета величины VAR показал, что для количественной оценки кредитных рисков по показателю «вероятность неплатежеспособности заемщика», следует использовать универсальный статистический метод «Монте-Карло», так как, он, во-первых, обладает высокой точностью; во-вторых, позволяет учитывать нелинейные ценовые характеристики, тогда как модели специализированной группы статистических методов характеризуются линейностью моделей и зависимостью от статистических данных.

Однако для использования метода «Монте-Карло» к оценке риска невозврата ссуды необходима адаптация модели к особенностям этого вида риска (например, через величину ссуды и величину торговых запасов фирмы) путем использования теории вероятности и случайных процессов.

Построим модель оценки риска на таком финансовом показателе работы фирмы, как *выручка*, так как данный показатель является наиболее информативным и наблюдаемым. В общем случае выручка фирмы за некоторый период времени t с учетом изменений, вызванных теми или иными случайными причинами, определится выражением

$$Rev(t) = \rho t + \sigma W_t, \tag{1}$$

где $\rho = PQ/N$ – средняя выручка за единицу (период) времени; σ – валатильность; $W_t = dB_t/dt$ – Винеровский случайный процесс (B_t – одномерное броуновское движение, подчиняющееся стандартному нормальному распределению ($M_X = 0$, $D_X = 1$)).

Тогда динамика выручки фирмы определится выражением

$$dRev(t) = \rho\, dt + \sigma\, dB_t. \tag{2}$$

Для формализации критерия неплатежеспособности рассмотрим следующую ситуацию. Пусть фирма берет у банка ссуду X_{10}. На полученные средства фирма увеличивает товарные запасы X_2. Источником погашения ссуды является выручка фирмы от реализации товарных запасов (1).

Текущая сумма задолженности фирмы перед банком (далее ссуда) с учетом (1) определится выражением

$$X_1(t) = 0,5rX_{10}t + E_0 t - \rho t - \sigma \frac{dB_t}{dt}, \tag{3}$$

где r – процентная ставка по ссуде; X_{10} – начальная ссуда; E_0 – постоянные расходы.

Величина запасов фирмы X_2 с учетом (1) определится выражением

$$X_2(t) = -\gamma\left(\rho t + \sigma \frac{dB_t}{dt}\right), \tag{4}$$

где γ – величина, обратная торговой наценке.

Далее, рассматривая ситуацию, когда $X_1 > 0$, $X_2 > 0$, из (3) и (4) получим мгновенные изменения величин X_1 и X_2, определяемые согласно (1) и (4) выражением

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\rho + E_0 + 0,5rX_{10}) \\ -\gamma\rho \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} -\sigma \\ -\gamma\sigma \end{bmatrix} dB_t. \tag{5}$$

Проинтегрировав (5) получим

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\rho + E_0 + 0,5rX_{10}) \\ -\gamma\rho \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\sigma \\ -\gamma\sigma \end{bmatrix} B_t + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $C_1 = X_{10}$ – выданная ссуда; $C_2 = x_2(0)$ – начальное количество запасов.

Далее с использованием (5) можно изобразить случайные процессы изменения товарных запасов и возврата ссуды на плоскости $0X_1X_2$. Возможные варианты протекания случайных процессов в плоскости $0X_1X_2$ представлены на рис. 1. Здесь характерными точками являются точки пересечения с осями координат, причем *положительным исходом* следует считать переход случайного процесса через ось $0X_2$, означающий возврат ссуды, при наличии товарного запаса у фирмы; *отрицательным исходом* следует считать переход случайного процесса через ось $0X_1$, означающий, что товарные запасы закончились до момента погашения ссуды.

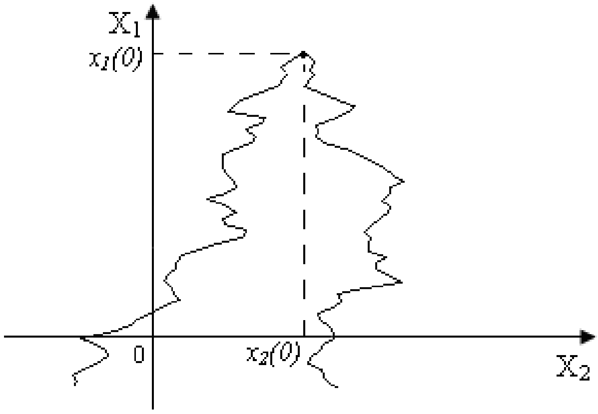

Рис. 1

Для упрощения анализа неплатежеспособности заемщика исключим случайную составляющею из первого уравнения (6) при неизменности второго уравнения. Этого можно достичь, если осуществить переход к новым координатам в соответствие с выражением

$$\bar{Y} = A \cdot \bar{X}\,, \tag{7}$$

или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma\sigma & \sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} (-\rho + E_0 + 0,5rX_{10}) \\ -\gamma\rho \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\sigma \\ -\gamma\sigma \end{bmatrix} B_t + \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \right), \tag{8}$$

Тогда процесс $Y_1(t)$ описывает разность запасов фирмы и ссуды, что характеризует планируемый капитал фирмы, а $Y_2(t)$ по-прежнему описывает уравнение запасов.

Учитывая, что $X_1 > 0$, $X_2 > 0$, получим

$$Y_1 < Y_2\sigma; \quad Y_2 > 0; \quad Y_1 > 0. \tag{9}$$

Изобразим случайный процесс Y_2 и область, определенную (9) на плоскости $0Y_1Y_2$ (рис. 2).

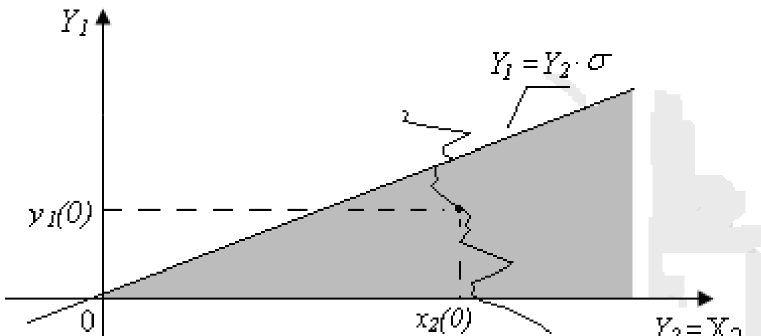

Рис. 2

В дальнейшем интерес представляют точки пересечения случайного процесса Y_2 с осью $0Y_2$ (соответствующие случаю невозврата ссуды (аналогично с процессом X_2)) и с прямой $Y_1 = Y_2\sigma$ (случай возврата ссуды).

Перейдем от изображения процессов Y_1, Y_2 в фазовой плоскости $0Y_1Y_2$ к их изображению во временной области. Процессы $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, построенные по выражению (8) изображены на рис. 3.

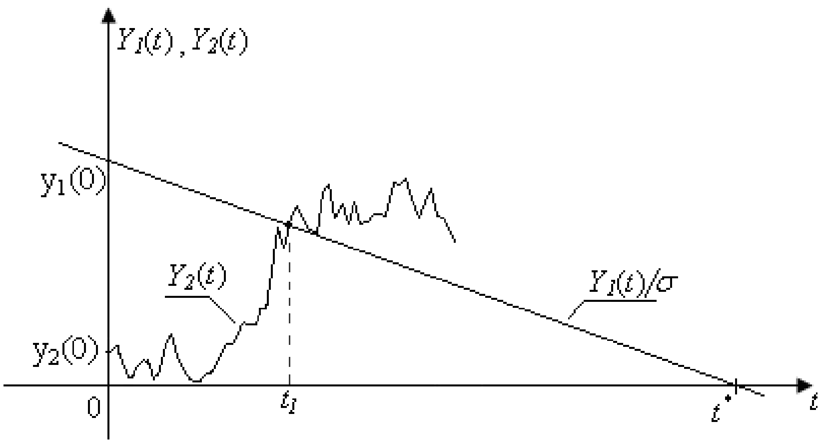

Рис. 3

Характерными точками полученных графиков являются:

1) t^*, соответствующая условию $Y_1(t^*) = 0$. Это момент времени соответствующий равенству запасов фирмы и ссуды. Причем до t^* фирма может погасить ссуду, после t^* запасы фирмы меньше ссуды;

2) точки пересечения случайным процессом $Y_2(t)$ оси t, соответствующие ситуации, когда ссуда не возвращена;

3) t_1, соответствующая пересечению процессом $Y_2(t)$ прямой $Y_1(t)/\sigma$, означающая тот факт, что ссуда может быть возвращена (необходимое условие возврата ссуды), а необходимым и достаточным условием возврата следует рассматривать условие $t_1 < t^*$.

Определим момент времени t^*, используя первое уравнение (8)

$$t^* = \frac{2x_2(0) - 2\gamma \cdot x_1(0)}{\gamma(2E_0 + rX_{10})}. \tag{10}$$

Используем условие $t_1 < t^*$ для того, чтобы выразить случайную составляющую процесса $Y_2(t)$

$$B_t = \frac{(2E_0 + rX_{10})t + 2x_1(0) - 2\rho t}{2\sigma}.$$

Это позволяет перейти от задачи решения пересечения процессов $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ к задаче определения момента первого выхода случайного процесса B_t через наклонную границу вида $a + bt$ (рис. 4) с использованием свойств момента остановки τ_{ab} [2].

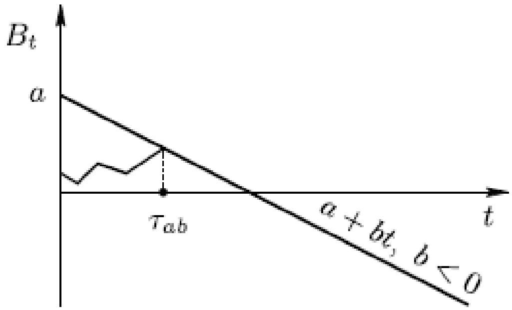

Рис. 4

Тогда математическое ожидание времени пересечения случайным процессом границы определится выражением

$$E\tau_{ab} = \frac{a}{|b|},$$

плотность вероятности момента первого выхода равна

$$p\tau_{ab} = \frac{a}{t}\varphi_t(a+bt), \qquad \varphi_t(a+bt) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(a+bt)^2}{2t}}$$

где $a = \dfrac{x_1(0)}{\sigma}$, $b = \dfrac{2E_0 + rX_{10} - 2\rho}{2\sigma}$.

Итак, искомая вероятность того, что процесс за время $[0; t^*]$ пересечет границу, а значит и вероятность возвращения ссуды, определяется выражением

$$P\left(\tau_{ab} < t^*\right) = \int_0^{t^*} \frac{a}{t}\varphi_t(a+bt)\,dt.$$

Библиографический список

1. Батракова, Л.Г. Экономический анализ деятельности коммерческого банка: учеб. для вузов / Л.Г. Батракова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М: Логос, 2005. – 368 с.

2. Ширяев, А.Н. О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением / А.Н. Ширяев // Современные проблемы математики. – М.: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (МИАН). – 2007. – Вып. 8. – С. 56–62.

3. Энциклопедия финансового риск-менеджмента / под ред. А.А. Лобанова и А.В. Чугунова. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Альпина Паблишер, 2005. – 856 с.