ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

А.А. Поляков

Рассмотрим конечномерное векторное пространство. Ортогональное преобразование сохраняет все расстояния между точками пространства, а также углы между векторами. К ортогональным преобразованиям относятся зеркальное отражение относительно гиперплоскости и вращение в 2-плоскости. Можно показать, что операцию вращения в 2-плоскости порождают две последовательных операции зеркального отражения. Все виды ортогональных преобразований векторного пространства можно получить, проведя n последовательных зеркальных отражений. Причем достаточное количество операций n не больше размерности пространства. Последнее утверждение легко доказать, если вспомнить теорему линейной алгебры о том, что матрица ортогонального преобразования сводится к блок-диагональному виду, то есть к такому виду, у которого на диагонали вращение занимает две позиции, а отражение – одну.

Алгебраический и геометрический подход. Предлагаемый геометрический подход заключается в описании ортогонального преобразования зеркальными отражениями. Почему мы называем такой метод геометрическим? Применение методов линейной алгебры позволяет свести преобразование к решению характеристического полинома, степень которого определяет размерность преобразования, поэтому не требуется просматривать все степени последовательно. При анализе преобразований геометрически, то есть с помощью отражений, приходится рассматривать последовательно все преобразования для каждого n. Геометрический подход позволяет создать достаточно короткую цепочку операций для описания ортогонального преобразования. Заметна быстрая сходимость итераций в этом методе.

Зеркальные отражения мы будем описывать нормалями к зеркальным гиперплоскостям. Все гиперплоскости зеркальных отражений проходят через начало координат, при вращениях начало координат остается неподвижным. Схематически эти нормали будем показывать точками. Набор таких последовательно действующих операций зеркальных отражений назовем версором (термин, предложенный Д. Хестенсом для геометрического произведения нормалей к гиперплоскостям, используемых в операторе ортогонального преобразования в рамках алгебры Клиффорда[1]). Главная задача: ортогонализовать версор, то есть расположить векторы нормалей так, чтобы они были расположены во взаимно ортогональных 2-плоскостях. Решение такой задачи соответствует нахождению собственных значений и собственных векторов, а также нахождению стационарных углов между плоскостями.

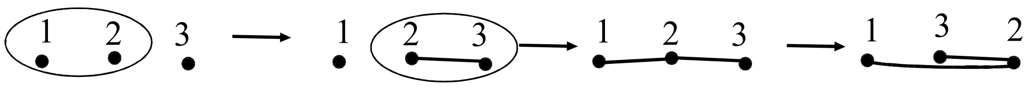
Основные приемы работы с нормалями к зеркальным гиперплоскостям (в дальнейшем мы будем называть их просто векторами):

1. Последовательность действия взаимно ортогональных векторов можно заменить на противоположный, то есть эти векторы коммутируют. Заметим, что пара соседних по времени взаимно ортогональных векторов порождает инволюцию в 2-плоскости, натянутой на эти векторы. Инволюцией мы будем называть инверсию относительно начала координат. Ортогональность векторов на схеме показана линией, соединяющей точки.

2. Пара последовательно действующих векторов может быть повернута на любой угол в 2-плоскости, которой они принадлежат, если угол между ними останется постоянным. Это связано с тем, что преобразование, описываемое такой парой, есть поворот в направлении от первого вектора ко второму на удвоенный угол между ними.

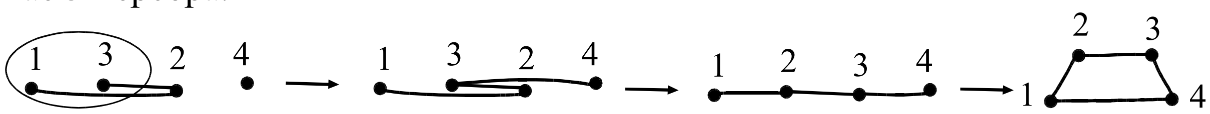
3. Проекция вектора на 2-плоскость и нормаль к проекции в этой плоскости.

Получение собственных значений и стационарных углов. Предполагается, что векторы версора являются линейно независимыми, размерность пространства не меньше числа векторов в версоре. Рассмотрим последовательно версоры, состоящие из 3,4,5 векторов. Порядок действия зеркальных отражений определяется номером вектора.



Версор из 3 нормалей. Поворачивается пара 12 так, что вектор 2 оказывается нормален вектору 3. Затем пара 23 поворачивается так, что вектор 2 оказывается нормален вектору 1. Мы получим «нить» взаимно ортогональных векторов. Заметим, что угол 13 является стационарным для плоскостей 12 и 23. Порядок действия векторов 23 можно заменить на 32, так как эти вектора взаимно ортогональны. Операция 13 является вращением, угол между векторами определяет собственное значение, а положение плоскости 13 определяет собственные вектора преобразования. Вектор 2 нормален плоскости 13, он является собственным вектором зеркального отражения.

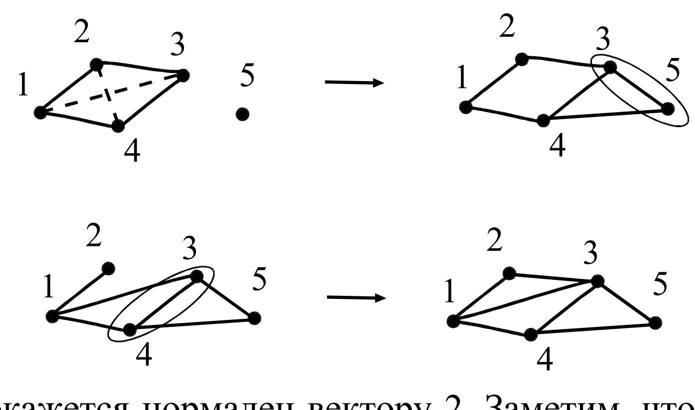
Версор из 4 векторов. Пусть версор состоит из четырех линейно независимых векторов. Ортогонализуем первые три вектора так же, как в случае 3-версора.



Заметим, что пара 13 может поворачиваться, не нарушая ортогональность пар векторов 12 и 23. Повернем ее так, что вектор 3 будет нормален вектору 4. Вектора 2 и 3 ортогональны, поэтому можно изменить порядок их действия. Мы получили «нить» взаимно ортогональных векторов. Из рисунка видно, что ортогональное преобразование в четырех измерениях можно описать двумя последовательными инволюциями в двух 2-плоскостях. Найдем стационарные углы между 2-плоскостями 12 и 34.

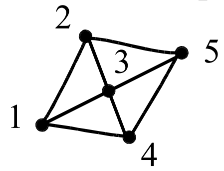
Для этого преобразуем версор так, что будут ортогональны вектора 1 и 4. Будем производить связанное вращение двух пар векторов – 12 и 34 – в своих плоскостях. Это легко осуществимо: повернув пару 12, найдем нормаль к проекции вектора 2 в плоскости 34 и совместим с этой точкой вектор 3 поворотом пары 34, то есть четверка векторов вращается как единое целое. Заметим, что выбор нормали к проекции может быть осуществлен двумя способами: нормаль к данной зеркальной гиперповерхности может быть направлена в двух противоположных направлениях. Ортогонализацию векторов 1 и 4 можно провести, записав характеристическое квадратное уравнение, либо используя метод последовательных приближений. Рассмотрим, как можно осуществить итерации в данном случае: a) проводим нормаль к вектору 1 в плоскости 34; b) поворачиваем четверку векторов так, что вектор 4 совпадет с этой нормалью; c) повторяем операции *a* и *b*. Повторение итераций позволит получить решение с любой точностью. Назовем полученное решение «квадратом» векторов. Угол между векторами 1 и 3 и угол между векторами 2 и 4 являются стационарными углами между 2-плоскос-тями 12 и 34. Плоскости 13 и 24 являются собственными плоскостями (в них можно расположить взаимно ортогональные векторы, по которым определяются собственные векторы преобразования), по стационарным углам 13 и 24 можно определить собственные значения преобразования.

Версор из 5 векторов. Преобразуем первые четыре вектора по методике, описанной выше. Так как зеркальные отражения 2 и 3 коммутируют, пары векторов 13 и 24 могут вращаться в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.



Повернем эти пары так, чтобы векторы 3 и 4 оказались ортогональны вектору 5. Затем повернем пару векторов 35 так, чтобы вектор 3 оказался нормален вектору 1, затем повернем пару 43 так, что вектор 3 окажется нормален вектору 2. Заметим, что вектор 3 ортогонален всем остальным. Далее он не будет двигаться.

Оставшаяся четверка приводится итерациями к виду «квадрат». Получим «квадрат с центром» – канонический вид версора: взаимно ортогональные вращения 15 и 24 и зеркальное отражение 3. Можно отметить стационарные углы, например, между 2-плоскостью 12 и 3-плоскостью 345: это угол между векторами 2 и 4 и угол между векторами 1 и 5. Появление «треугольника» на втором шаге изменений версора говорит о том, что ортогональное преобразование, порождаемое пятью векторами зеркального отражения можно описать двумя инволюциями: в 2-плоскости и в 3-плоскости («треугольник», то есть тройка взаимно ортогональных векторов зеркального отражения порождает инволюцию в 3-плоскости, натянутой на эти вектора).



По стационарным углам можно определить собственные значения преобразования, а по положению плоскостей 24 и 15 – собственные векторы, вектор 3 также является собственным.

Следующим шагом будет увеличение количества векторов в версоре, формулирование общего метода для нахождения собственных значений и собственных векторов преобразования. В отличие от подхода, применяемого в линейной алгебре, при увеличении количества векторов в версоре на 2 придется формулировать новую методику ортогонализации, основанную на предыдущем шаге, то есть будет использоваться итерация итераций.

Данная методика была проверена в среде вычислений в рамках алгебры Клиффорда, реализованной автором [2].

Как известно, $2N$-мерное вещественное векторное пространство изоморфно N-мерному комплексному пространству. В квантовой механике одной из задач является нахождение собственных значений унитарного преобразования – аналога ортогонального преобразования на поле вещественных чисел. Поэтому предложенный подход может быть использован в квантовой физике.

Библиографический список

1. Hestenes, D. A Unified Language for Mathematics and Physics / D. Hestenes // J.S.R. Chrisholm / A.K. Commons (Eds.) / Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics. – Dordrecht; Boston: Reidel, 1986. – P. 1–23.

2. Поляков, А.А. Геометрическая алгебра – единый язык математики и физики / А.А. Поляков // Наука ЮУрГУ: материалы 61-й науч. конф. Секция естеств. и гуманитар. наук. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. – Т. 2. – С. 253–255.