ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИВИЗНЫ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ЛИНИЙ

Т.Ю. Попцова

Круг вопросов, связанных с определением локальных характеристик кривых линий представляет собой основной предмет дифференциальной геометрии. Для того чтобы применить аналитический аппарат к решению этих вопросов, необходимо в каждом конкретном случае знать уравнение данного геометрического образа или иметь возможность его вывести. Но отыскать такое уравнение удается далеко не всегда, и поэтому из бесчисленного многообразия линий дифференциальная геометрия позволяет исследовать лишь сравнительно небольшое их количество. В технике, например, рассматривается много различных линий, аналитическое выражение которых неизвестно и единственным источником сведений является их изображение на комплексном чертеже. С развитием компьютерной графики кривую линию легко построить в 3D, но задача определения кривизны – разумеется, осталась. Графические методы позволяют решить задачу, не прибегая к составлению уравнений заданных геометрических образов.

Рассмотрим непрерывную кривую и будем считать, что в каждой ее точке существуют единственные касательная прямая и соприкасающаяся плоскость (рис. 1). Определим центр кривизны кривой m в произвольной ее точке P. Для решения задачи следует выполнить следующие построение. На данной кривой выберем ряд точек и в каждой из них проведем касательную. От выбранных точек отложим равные отрезки произвольной длины. Концы этих отрезков определяют некоторую кривую. Она называется эквинтангенциальной по отношению к заданной кривой. Точка P кривой m соответствует точке P_0 кривой m_0. Нормали, построенные в точках P и P_0 кривых m и m_0, пересекутся в точке O – искомом центре кривизны. Следовательно, кривизна кривой m в точке P равна $\kappa = 1/OP$.

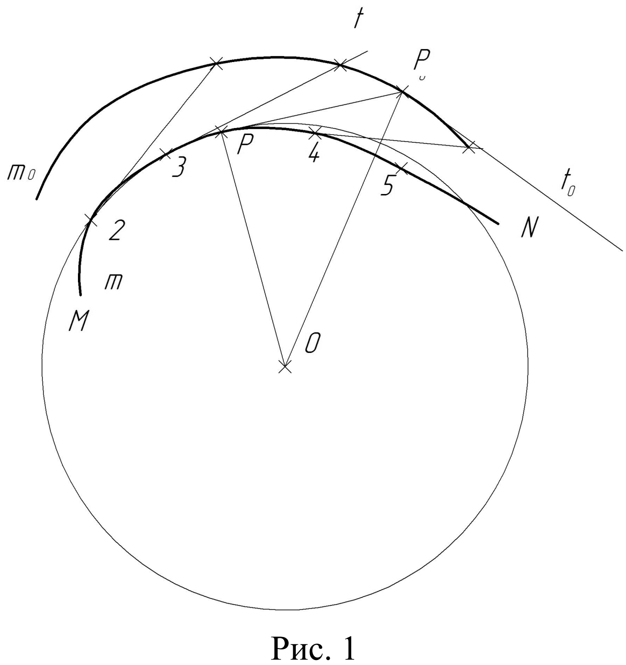

Рис. 1

Данную задачу попробуем решить другим способом. Сущность второго метода заключается в том, что проекция кривой заменяется в окрестности заданной точки дугами других кривых, имеющих с ней касание высших порядков (рис. 2). В заданной точке M кривой l проведем касательную t и нормаль n. Как известно, круг кривизны можно рассматривать как предел окружности, проведенной через три точки кривой, две из которых стремятся к точке касания M. Исходя из этого, возьмем произвольно на *кривой* справа и слева от M по равному количеству точек (на чертеже взяты две пары точек A, B и C, D) и проведем хорды MA, MB, …, MD.

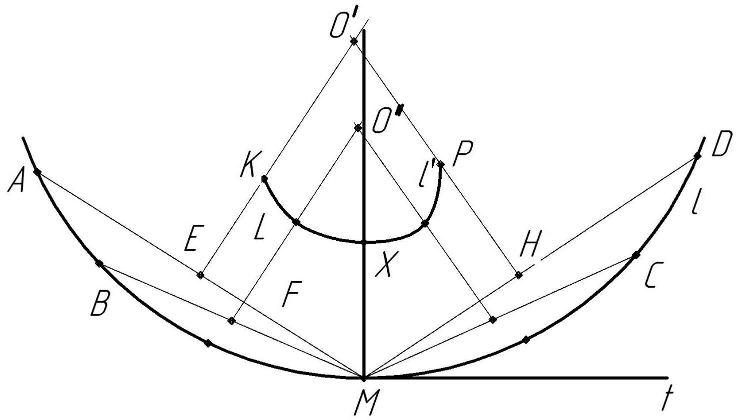

Рис. 2

Затем построим центры O^I и O^{II} окружностей AMD и BMC при помощи перпендикуляров, восстановленных из середин (E, F, H) соответствующих хорд. Разделив отрезки EO^I, FO^{II}, …, HO^I перпендикуляров пополам, проводим через полученные точки (K, P) кривую ошибок l^I, которая пересечет нормаль n в точке X. Искомый радиус кривизны равен $\rho=2MX$.

Рассмотренный геометрический алгоритм может быть распространен на пространственные кривые [2]. При этом предполагается исследование локальных характеристик не собственно кривой линии, а ее проекций. Определение кривизны методами 3D-моделирования (без использования проецирования кривой линии на плоскость) выполнить невозможно.

Алгоритмы определения кривизны графически заданных плоских и пространственных кривых могут быть использованы в учебном процессе как в курсе начертательной геометрии, так и в инженерной компьютерной графике, доставляя полезные упражнения в применении начертательной геометрии к техническим задачам.

Библиографический список

1. Курс начертательной геометрии / под ред. Н.Ф. Четверухина. – М.: Высшая школа, 1968. – 265 с.

2. Михнев, М.М. Графические методы определения кривизны плоских и пространственных кривых линий / М.М. Михнев // Труды всесоюзного заочного энергетического института. – М. – С. 37–51.