КВАДРАТИЧНЫЕ ИНВОЛЮЦИИ И ПУЧКИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧАХ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В.А. Короткий

Графические программные средства, применяемые в практике конструирования, не предназначены для решения научно-исследовательских задач прикладной геометрии. В графической САПР любого уровня содержится лишь крайне незначительный набор («базовая комплектация») самых элементарных геометрических инструментов.

Эти инструменты пригодны для изготовления электронных макетов простых технических форм, но для решения исследовательских задач начертательной и прикладной геометрии их совершенно недостаточно.

В связи с этим в различных научных школах Российской Федерации разрабатываются специализированные графические алгоритмы и программные средства решения задач геометрического моделирования. Существенным является то, что этот процесс идет не в рамках отрицания классической начертательной геометрии, но на базе глубокого знания фундаментальных закономерностей начертательной, проективной, алгебраической геометрий.

Начертательная геометрия – раздел математики, в котором изучаются способы отображения пространств различных размерностей друг на друга. Отображения выполняются на основе разнообразных геометрических преобразований. С этой точки зрения трехмерное электронное макетирование есть простейший способ отображения, ноль-преобразование, когда картина как «область прибытия» совпадает с изображаемым объектом – «областью отправления» [1].

Очевидно, с помощью электронных макетов могут быть рассмотрены только самые простые, метрически определенные, задачи геометрического моделирования. Если для решения задачи требуется выполнить какое-либо преобразование, то основным инструментом конструктора становятся не электронные макеты, а проекционный схематизм – аффинное, проективное либо нелинейное отображение пространств различной или совпадающей размерности друг на друга.

В качестве примера рассмотрим задачу геометрического моделирования, для решения которой необходимо использовать основной метод начертательной геометрии – проецирование. Пусть требуется построить плоскость, пересекающую данную призму по заранее заданному сечению, аффинно соответствующему основанию призмы (с точностью до подобия). Например, надо найти квадратное сечение T призмы с параллелограммом в основании (рис. 1). Известное решение основано на теореме об ортогонально-перспективном расположении плоских полей и предполагает построение оси l ортогонально-перспективного соответствия данного параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ и квадрата $A'B'C'D'$. Это действие (не показанное на чертеже) заключается в построении произвольного родства данного параллелограмма с квадратом и последующем поиске главных направлений установленного родства. Дальнейшее решение выполняется заменой плоскостей проекций и способом вращения.

Поставленную задачу не удается решить без аффинного преобразования плоскости проекций. В рамках «ноль-преобразования», то есть непосредственно на электронном макете, можно найти искомое сечение призмы только путем примитивной подгонки.

Еще один пример задачи геометрического моделирования, в которой существенным образом используется проекционный схематизм – построение кривой второго порядка методами проективной геометрии [2]. На основе проективных инвариантов составлена программа, выполняющая геометрически точное («циркулем и линейкой») построение главных осей и асимптот кривой второго порядка, заданной пятью инциденциями – точками и касательными [3].

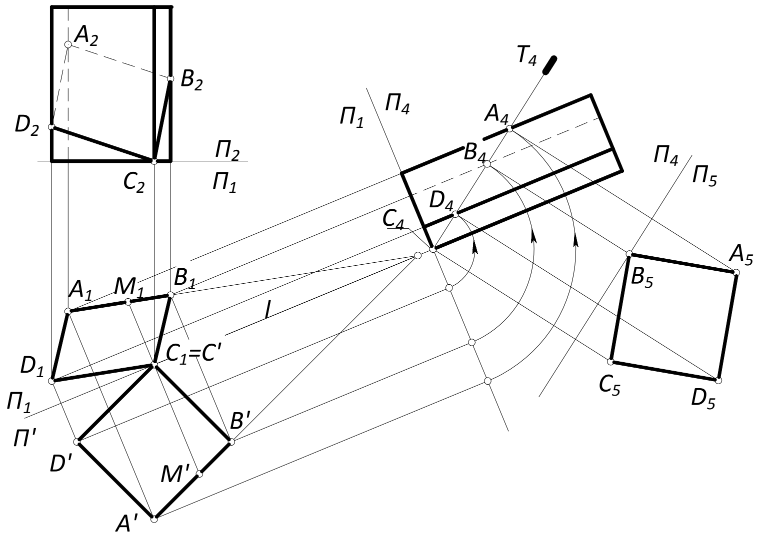

Рис. 1

Разработанное программное средство может быть использовано как в учебном процессе, так и в качестве инструмента для конструктивной реализации квадратичных кремоновых преобразований. Кремоновы преобразования представляют собой мощный аппарат решения, как фундаментальных геометрических проблем, так и задач прикладного характера. Они образуют самую обширную подгруппу группы взаимно однозначных преобразований и включают в себя проективные преобразования в качестве частного случая. Наибольшее применение в практике конструирования находит центральное квадратичное инволюционное преобразование I_2 – обобщенная инверсия, или преобразование Гирста [4].

Другой тип квадратичной инволюции J_2 (с попарно совпадающими ассоциированными F-точками) также используется в качестве инструмента геометрического моделирования. Специализация J_2 основана на известном свойстве пучка кривых второго порядка: поляры произвольной точки A относительно всех коник пучка пересекаются в одной точке A' (следствие второй теоремы Дезарга). Точки A и A' инволюционно соответствуют друг другу, а ряд точек преобразуется в ряд второго порядка (гомалоид).

Квадратичное преобразование J_2 позволяет решить следующую теоретическую задачу начертательной геометрии: построить автополярный треугольник, общий для всех коник пучка, заданного мнимыми базисными точками $k_1 \cap k_2$. Вершины $F_1F_2F_3$ искомого треугольника определяются на пересечении гомалоидов a^2, b^2, соответствующих в J_2 двум произвольным прямым a, b (рис. 2). Указанный алгоритм конструктивно реализуется в компьютерной модели с применением специализированного программного средства [3].

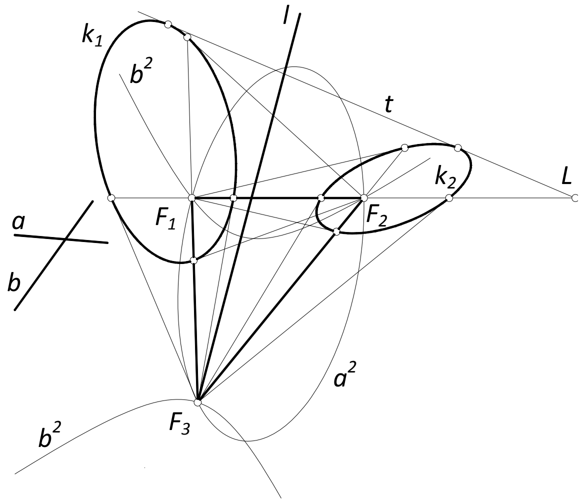

Рис. 2

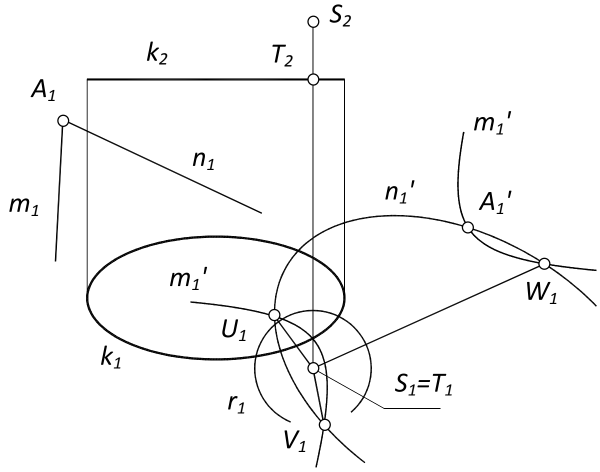

Рис. 3

Находить общий автополярный треугольник двух коник требуется при решении некоторых задач начертательной геометрии, например, при построении общей касательной кривых второго порядка. Если начерченные кривые имеют действительные точки пересечения, то построение их общей касательной выполняется одной линейкой, в ином случае требуется определять исключенные точки F_1, F_2, F_3 квадратичной инволюции J_2.

Другая известная геометрическая задача – преобразование пучка кривых второго порядка в пучок окружностей [5]. Решение состоит в поиске проективного преобразования, отображающего какую-либо пару мнимых точек пересечения данных кривых в циклические точки. Очевидно, если все точки пересечения вещественные, то задача не имеет решения. Если базисные точки пучка мнимые – надо применить преобразование J_2.

Рассмотрим еще один пример геометрического моделирования с использованием квадратичного преобразования, установленного пучком кривых второго порядка. Пусть на ортогональном чертеже (рис. 3) конус задан направляющим эллипсом $k(k_1, k_2)$ и вершиной $S(S_1, S_2)$. Требуется построить ось симметрии заданной конической поверхности. Предлагается следующий алгоритм, который чрезвычайно просто реализуется как на чертеже, так и в «трехмерной электронной компьютерной модели».

1. Находим основание T перпендикуляра, опущенного из S на плоскость направляющей коники k. В этой плоскости вычерчиваем дистанционную окружность r с центром T и радиусом ST.

2. В этой же плоскости проводим две произвольные прямые m, n, на каждой из которых отмечаем, кроме их общей точки A, еще по четыре произвольные точки: M_i на прямой m и N_i на прямой n $(i = 1, 2, \ldots 4)$. Находим образы A', M_i', N_i' этих точек в инволюции J_2. Например, образ M_1' точки M_1 определяется на пересечении поляр точки M_1 относительно действительного ядра k и относительно мнимого ядра поляритета α. Все действия выполняются одной линейкой.

3. Вычерчиваем гомалоиды m', n' как кривые второго порядка, проходящие через пятерки точек A', M_i' и A', N_i' [2, 3].

4. Отмечаем точки U, V, W пересечения гомалоидов (точку A' исключаем из рассмотрения). Соединив вершину S с найденными точками U, V, W, получаем искомые главные направления квадрики, заданной вершиной и направляющим эллипсом. Задача решена. Очевидно, в рамках «ноль-преобразования», без использования аппарата проецирования, она может быть решена только приближенно.

Подобные примеры демонстрируют необходимость совершенствования графических программ, потребность в разработке специализированных геометрических инструментов для решения как прикладных, так и теоретических задач геометрического моделирования.

Библиографический список

1. Волошинов, Д.В. Конструктивное геометрическое моделирование. Теория, практика, автоматизация / Д.В. Волошинов. – Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2010. – 355 с.

2. Короткий, В.А. Проективное построение коники [электронный ресурс www.lib.susu.ac.ru]: учеб. пособие / В.А. Короткий. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – 98 с.

3. Программа для ЭВМ «Построение кривой второго порядка, проходящей через данные точки и касающейся данных прямых» / В.А. Короткий, правообладатель ГОУ ВПО «ЮУрГУ», свидетельство о государственной регистрации № 2011611961 от 04.03.2011 г.

4. Иванов, Г.С. Конструирование технических поверхностей (математическое моделирование на основе нелинейных преобразований) / Г.С. Иванов. – М.: Машиностроение, 1987. – 192 с.

5. Скопец, З.А. Преобразование двух кривых второго порядка в две окружности посредством гомологии / З.А. Скопец // Известия ВУЗов. Математика. – 1964. – № 2 (39). – С. 139–143.