«ПРЯМОЙ» МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ КРОНЕКЕРА–КАПЕЛЛИ

Д.Б. Чернин

Общеизвестные доказательства приведенной в заголовке теоремы основываются на введении понятия векторов в пространстве произвольной размерности и их линейной зависимости-независимости. При этом теория линейных уравнений, а именно этим и ограничивается курс линейной алгебры для большинства нематематических специальностей, не включает в формулировки своих результатов эти понятия. Поэтому доказательство теоремы Кронекера–Капелли, построенное на понятиях, используемых в ее формулировке крайне желательно.

Пусть дана система уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

или в матричной форме

$$AX = b, \tag{1}$$

где A – матрица коэффициентов рангом «r», b – матрица свободных членов.

Выделим подсистему «r» уравнений, коэффициенты при части неизвестных в которой и образуют матрицу, определяющую ранг матрицы A. Запишем эту подсистему в виде

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}x_j^* = b_i - \sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}x_j, \tag{2}$$

где $i = 1,\ldots,r$, x_j^* – помеченные неизвестные, которые следует считать базисными, n – число неизвестных в системе (1). Принятая нумерация не нарушает общности решения задачи.

Обозначим: $B_i = b_i - \sum\limits_{j=r+1}^{n} a_{ij}x_j$.

Поскольку определитель $\Delta_r = \left|a_{ij}\right| \neq 0$, то справедливо соотношение

$$B_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}y_j, \; i = 1,\ldots,r, \tag{3}$$

где y_j – решение системы (2) при каких-либо значениях свободных переменных x_j (все равно каких).

$r+1$-е уравнение системы (1) представим в виде

$$\sum_{j=1}^{r} a_{r+1,j}x_j^* = b_{r+1} - \sum_{j=r+1}^{n} a_{r+1,j}x_j = B_{r+1}.$$

Существенно: B_{r+1} в виде (3) пока что не представляется. Доказательство справедливости этого соотношения и для B_{r+1} является целью дальнейших выкладок. Тем самым будет доказана и справедливость теоремы.

Подсчитаем определитель вида

$$\Delta_{r+1}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1r} & | & B_1 \\ \vdots & & & & & | & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ir} & | & B_i \\ \vdots & & & & & | & \\ a_{r1} & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rr} & | & B_r \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,j} & \dots & a_{r+1,r} & | & B_{r+1} \end{vmatrix}.$$

В силу равенства (3)

$$\Delta_{r+1}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1r} & | & \sum\limits_{j=1}^{r} a_{1j}y_j \\ \vdots & & & & & | & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ir} & | & \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}y_j \\ \vdots & & & & & | & \\ a_{r1} & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rr} & | & \sum\limits_{j=1}^{r} a_{rj}y_j \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,j} & \dots & a_{r+1,r} & | & B_{r+1} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель окаймляет «ранговый» определитель и состоит из произвольно выбранной строки коэффициентов, которой присваивается номер «$r+1$» и соответствующей величины B_{r+1}.

«Расписываем» Δ_{r+1} по нижней строке:

$$\Delta_{r+1}=(-1)^{2r+2}B_{r+1}\Delta_r+\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r+1+j}a_{r+1,j}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & | & \sum y_j a_{1j} \\ \vdots & & & | & \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & | & \sum y_j a_{ij} \\ \vdots & & & | & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & | & \sum y_j a_{rj} \end{vmatrix}.$$

Столбец с номером j «вычеркнут» из определителя.

Последний столбец этого определителя – есть сумма чисел, поэтому

$$\Delta_{r+1}=B_{r+1}\Delta_r+\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r+1+j}a_{r+1,j}\cdot\left(\sum_{k=1}^{r}y_k\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ik} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \end{vmatrix}\right).$$

Все определители суммы с индексом $k \neq j$ равны нулю, поскольку содержат два одинаковых столбца. Поэтому:

$$\Delta_{r+1} = B_{r+1}\Delta_r + \sum_{j=1}^{r} (-1)^{r+1+j} a_{r+1,j} y_j \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \end{vmatrix}.$$

Подсчитываем определители по минорам Δ_{r-1} членов последнего столбца

$$\Delta_{r+1} = B_{r+1}\Delta_r + \sum_{j=1}^{r} (-1)^{r+1+j} a_{r+1,j} y_j \cdot \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+r} a_{ij}\Delta_{r-1}.$$

Перепишем

$$\Delta_{r+1} = B_{r+1}\Delta_r + \sum_{j=1}^{r} y_j a_{r+1,j} \cdot \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r+1+j+i+r} a_{ij}\Delta_{r-1}.$$

Заметим:

$$(-1)^{r+1+j+i+r} = (-1)^{2r+1+j+i} = (-1)^{i+j} \cdot (-1).$$

Последнее позволяет переписать:

$$\Delta_{r+1} = B_{r+1}\Delta_r - \sum_{j=1}^{r} y_j a_{r+1,j} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{r-1}.$$

«Внутренняя» сумма в последней формуле есть ни что иное как Δ_r.

Потому:

$$\Delta_{r+1} = \Delta_r \left(B_{r+1} - \sum a_{r+1,j} y_j \right). \tag{4}$$

$\Delta_r \neq 0$. Это означает, что порядок подсчитываемого определителя совпадает с рангом матрицы тогда и только тогда, когда совокупность базисных решений $\{y_i\}$ удовлетворяет системе $r+1$ уравнений, выбранных произвольным образом.

Порядок «расширенного» определителя совпадает с рангом расширенной матрицы. Действительно, по выведенному ранее

$$\Delta_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 - \sum\limits_{j=r+1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots & & & \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r+1} & b_{r+1} - \sum\limits_{j=r+1}^{n} a_{r+1,j} x_j \end{vmatrix}.$$

Подсчитывая этот определитель как сумму определителей в соответствии со структурой последнего столбца, заметим, что для каждого определителя вида

$$\Delta_{r+1}^{k}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+k} \\ \vdots & & & \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r+1} & a_{r+1,r+k} \end{vmatrix}$$

справедливо $\Delta_{r+1}^{k}=0$, так как $\operatorname{rang} A=r$, а представленный определитель порядка $r+1$, так что отличным от нуля может быть только определитель матрицы вида

$$\Delta_{r+1}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,r+1} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{r+1} & \dots & a_{r+1,r+1} & b_{r+1} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Можно считать доказанным совпадение порядков определителей, записанных в форме (4) и (5), и, тем самым, рангов представляемой ими матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

которая по определению является расширенной матрицей и входит в формулировку теоремы Кронекера-Капелли.

Библиографический список

1. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – СПб., 2004.