КАК РЕШАЮТ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

И.В. Ковалева

Особую роль для развития творческих способностей учащихся играют нестандартные задачи – задачи, для решения которых у учащихся нет готового алгоритма.

Важнейший источник таких задач – различные олимпиады и конкурсы.

При обучении умению решать нестандартные задачи следует находить и решать более простую «родственную задачу». Это часто дает ключ к решению исходной. Помогают следующие соображения:

- рассмотреть частный (более простой) случай, а затем обобщить идею решения;
- разбить задачу на подзадачи (например, необходимость и достаточность);
- обобщить задачу (например, заменить конкретное число переменной);
- свести задачу к более простой («причесывание задач»).

Пример 1. Кратчайшие пути на поверхности многогранника. Развертки.

Задачи типа «найти кратчайший путь отсюда туда на поверхности многогранника» решаются с помощью разверток поверхности многогранника: грани многогранника укладывают на плоскость и затем ищут кратчайший путь в соответствии с основным геометрическим принципом.

Задача. Комната имеет следующие размеры: высота 2 м, ширина 2 м, длина a м. На одной из стен размера 2×2 на расстоянии 1/2 м от пола (и на равном расстоянии от соседних стен) сидит паук. На противоположной стене в центрально симметричной точке (т. е. на расстоянии 1/2 м от потолка) сидит муха. Как пауку быстрее добраться до мухи?

Решение. Уложим стены, пол и потолок на плоскость, прикладывая их друг к другу в соответствии с маршрутом паука: если, например, паук переползает со своей стены на пол, то к его стене (по ребру, через которое он переползает), прикладывается прямоугольник «пол».

Обозначим буквами все прямоугольники: И (исходная) – стена, на которой находится паук, Пр и Л – правая и левая (относительно паука) – стена, К (конец) – стена с мухой, В (верх) – потолок, Н (низ) – пол.

Рассмотрим маршруты:

I. И-Н-К.

II. И-Н-Пр-К.

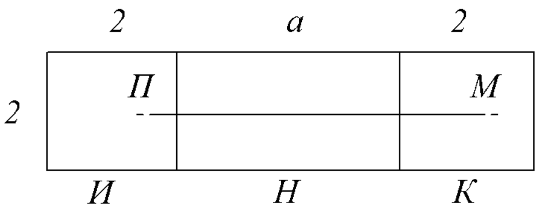
III. И-Н-Пр-В-К.

Все остальные маршруты либо симметричны одному из этих трех, либо явно не оптимальны. Рассмотрим соответствующие развертки, отметим на каждой из них кратчайший прямолинейный путь.

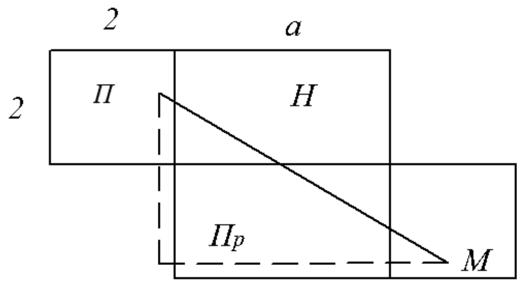
Их длины равны: для пути I: $I_1 = 2 + a$;

для пути II: $I_2 = \sqrt{\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + 3a + \frac{17}{2}}$;

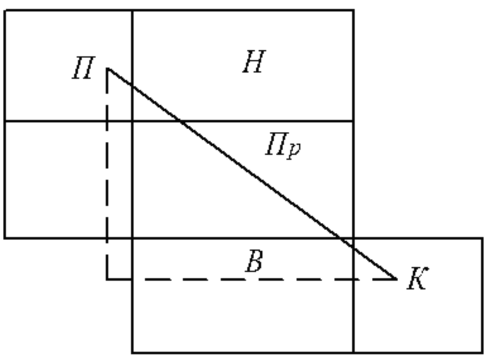
для пути III: $I_3 = \sqrt{(a+1)^2 + 4^2} = \sqrt{a^2 + 2a + 17}$.



I: ПМ=2+a



II: ПМ=$\sqrt{\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}$



III: ПМ=$\sqrt{(a+1)^2 + 4^2}$

Сравним их длины:

$I_1 > I_2 \Leftrightarrow I_1^2 > I_2^2 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 > a^2 + 3a + \frac{17}{2} \Leftrightarrow a > \frac{9}{2}$;

$I_2 > I_3 \Leftrightarrow I_2^2 > I_3^2 \Leftrightarrow a^2 + 3a + \frac{17}{2} > a^2 + 2a + 17 \Leftrightarrow a > \frac{17}{2}$.

Отсюда немедленно следует:

$a > \frac{17}{2}$ – кратчайшим является маршрут III;

$\frac{9}{2} < a < \frac{17}{2}$ – кратчайшим является маршрут II;

$a < \frac{9}{2}$ – кратчайшим является маршрут I.

Наконец, при $a = \frac{9}{2}$ оба маршрута I и II являются кратчайшими, а при $a = \frac{17}{2}$ кратчайшими будут оба маршрута II и III.

Замечание. Осталось еще отметить, что найденные нами кратчайшие маршруты и в самом деле проходят по стенам в нужном порядке - именно в том, в соответствии с которым строилась развертка. Без такой проверки решение будет неполным (а игнорирование ее может привести к грубым ошибкам).

Пример 2. Ослабление связей.

Как правило, поиск «наилучшего объекта» происходит в несколько туров. Сначала, например, отсеиваются заведомо негодные объекты: поиск «наилучшего» затем ведется только среди оставшихся. Оказывается, имеет место и прямо противоположная схема. Именно, иногда бывает полезно заменить задачу типа «среди моих хороших знакомых найти самого хорошего» другой задачей «найти самого хорошего в мире». Такая замена вполне допустима, если «самый хороший в мире» является к тому же и «хорошим знакомым». Такая замена окажется даже вполне полезной, если, например, мы располагаем отлаженным алгоритмом, предназначенным для решения этой новой задачи.

Задача. Найти шестиугольное сечение куба с наименьшим периметром.

Решение. Условие «шестиугольности» означает: секущая плоскость пересекает все шесть граней куба. Рассмотрим новую задачу: «построить на поверхности куба замкнутый маршрут наименьшей длины, ровно один раз проходящий по каждой грани». Уложим грани куба на плоскость в соответствии с рекомендациями примера 1 (то есть, прикладывая их друг к другу в соответствии с маршрутом). Рассмотрим два случая:

1. Существует грань такая, что маршрут пересекает два ее параллельных ребра.
2. Такой грани нет.

С точностью до симметрии в первом случае получится укладка, изображенная на рис. 1, а во втором – изображенная на рис. 2 («жирными» отрезками у начальной и конечной граней выделено их общее ребро).

Если X – точка маршрута на ребре, общем у начальной и конечной граней маршрута, то на полученных развертках маршруту будет соответствовать ломаная с началом в точке X, лежащей на начальной грани маршрута, и с концом в точке (обозначим ее также буквой X) на конечной грани маршрута. Маршрут будет кратчайшим, если ломаная совпадет с отрезком XX. Для первого случая длина этого отрезка равна $\sqrt{20}$, а для второго – $\sqrt{18}$ (и не зависит от положения точки X на отрезке AD). Отметим, что в обоих случаях отрезок XX пересекает все шесть граней и не выходит за пределы развертки. Но $\sqrt{20} > \sqrt{18}$, так что второй маршрут лучше. Более того, во втором случае отрезок XX пересекает все ребра развертки под углом $\pi/4$, и, как нетрудно убедиться, при «заворачивании» куба в его развертку отрезку XX соответствует плоский маршрут. Итак, задача имеет бесконечно много решений: минимальным является любое шестиугольное сечение куба, ортогональное его большой диагонали; периметр «минимального сечения» равен $3\sqrt{2}$.

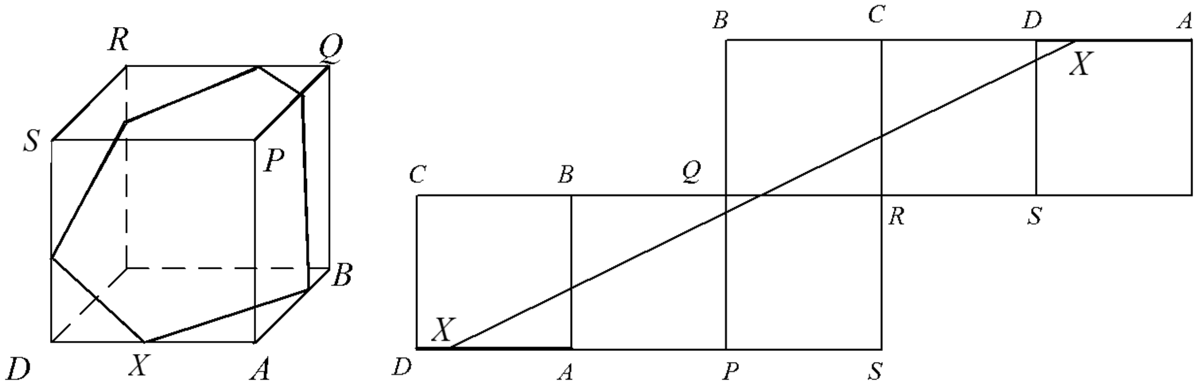


Рис 1. Отрезок XX пересекает все шесть граней и имеет длину $2\sqrt{5}$

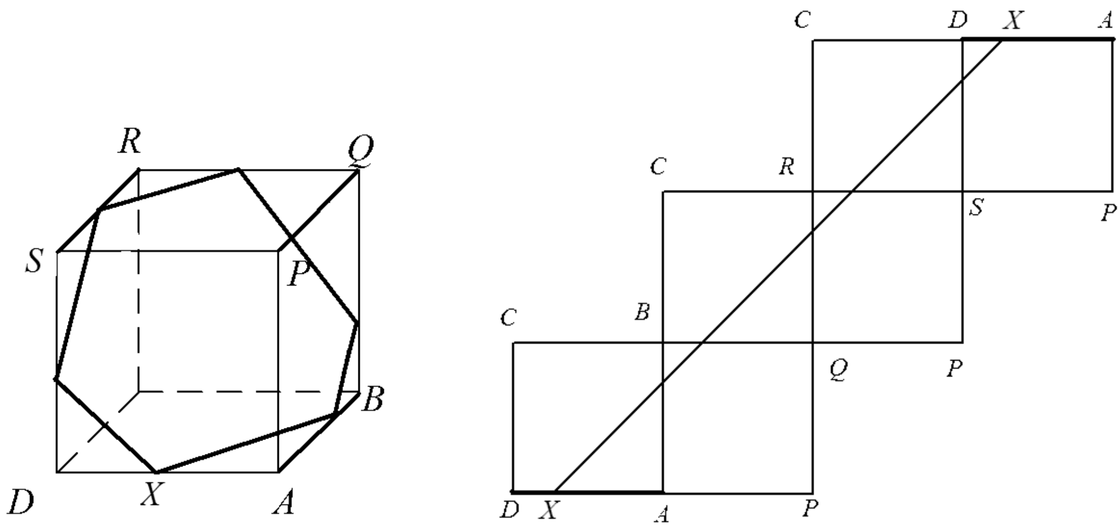


Рис. 2. Отрезок XX пересекает все шесть граней и имеет длину $3\sqrt{2}$

Замечание. Надо отметить, что здесь нам повезло (в том, что второй маршрут оказался короче первого), первый маршрут не является «плоским».

Библиографический список

1. Математика. Всероссийские олимпиады: учеб. пособие / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников и др.; под ред. С.И. Демидовой, И.И. Колисниченко. – М.: Провещение, 2008. – Вып. 1. – 192 с.

2. Механизм творчества решения нестандартных задач. Руководство для тех, кто хочет научиться решать нестандартные задачи: учеб. пособие / В.В. Дроздина, В.Л. Дильман. – М.: БИНОМ. Лаборатория изданий, 2008. – 255 с.