ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА И РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Ю.С. Асфандиярова

В приложениях (например, в теории динамических измерений [1]) возникают проблемы, приводящие к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с неклассическими краевыми условиями – многоточечные краевые задачи, задачи с распределенными данными и т. п.

Все подобные задачи могут быть сформулированы в виде

$$\begin{cases} L[x] = x^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + p_1(t)x'(t) + p_0(t)x(t) = f(t), \\ U_j(x) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $p_i(t)$, $f(t)$ – непрерывные на $[a,b]$ функции, α_j – числа, $U_j(x)$ – линейные, линейно-независимые функционалы, представимые в общем случае

$$U_j(x)=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}x(t_i)+\int_a^b g_j(t)x(t)dt,$$

часто возникает задача нахождения правой части $f(t)$ по *экспериментально измеренной* функции $\tilde{x}(t)\approx x(t)$ – т. н. *обратная задача*.

На первый взгляд, логичным представляется решение поставленной задачи подстановкой измеренной функции $\tilde{x}(t)$ в дифференциальное выражение $L[\tilde{x}]$. Однако, хорошо известно (например, [3]), что наличие погрешностей измерения (даже малых) приводит к значительным ошибкам восстановления $f(t)$.

В настоящей работе предлагается метод построения решения обратной задачи обращением дифференциального оператора с помощью функции Грина, использующий хорошо известное соотношение для решения полуоднородной ($U_j(x)$=0) краевой задачи:

$$x(t)=\int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{2}$$

где $G(t,\tau)$ – функция Грина задачи (1).

Эффективные и устойчивые методы решения подобных задач хорошо известны (например, [2, 3]).

Определенную сложность представляет построение функции Грина в ситуации, когда фундаментальная система решений исходного дифференциального уравнения неизвестна.

В работе [9] был предложен метод построения функции Грина в этом случае, в дальнейшем развитый в [6–8].

Предлагаемый способ использует функцию Грина вспомогательной задачи. Дифференциальное выражение этой задачи получается из исходного выражения $L[x]$ отбрасыванием всех слагаемых, кроме старшей производной $x^{(n)}(t)$. Функция Грина вспомогательной задачи ищется традиционно, по определению. Функция Грина исходной задачи ищется как решение уравнения Фредгольма II-го рода [5]:

$$G(t,s)-\tilde{G}(t,s)=\int_a^b G(t,\tau)V(\tau,s)d\tau, \tag{3}$$

где $\tilde{G}(t,s)$ – функция Грина вспомогательной задачи, и

$$V(\tau,s)=-\sum_{k=0}^{n-1}p_k(t)\frac{\partial^k\tilde{G}(\tau,s)}{\partial\tau^k}.$$

На основании разработанной теории, анализа существующих методов и современных тенденций развития компьютерной техники, был предложен алгоритм решения рассматриваемого класса обратных задач [8].

Кратко этот алгоритм может быть представлен следующим образом:

Входные данные: $x(t)$ – измеренный сигнал, $p_i(t)$ $(i=1,2,...,n)$ – коэффициенты дифференциального уравнения, $U_j(x)$ $(j=1,2,...,n)$ – граничные условия.

1. Вычисляем функция Грина вспомогательной задачи.
2. Находим функцию Грина основной задачи (1) из уравнения (3).
3. Находим искомую функцию из соотношения (2), рассматриваемого как уравнение относительно $\tilde{f}(t)$ при заданной функции $x(t)$.

Выходные данные: $f(t)$ – искомая функция (воздействие на систему).

Описанный алгоритм вычисления функции Грина и нахождения решения обратной задачи для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами реализован с использованием пакета Mathematica 8.0.

Программа, реализующая описанный алгоритм для вычислительных систем с массовым параллелизмом находится в стадии разработки.

Результат работы программы на одном из тестовых примеров [7].

Пример.

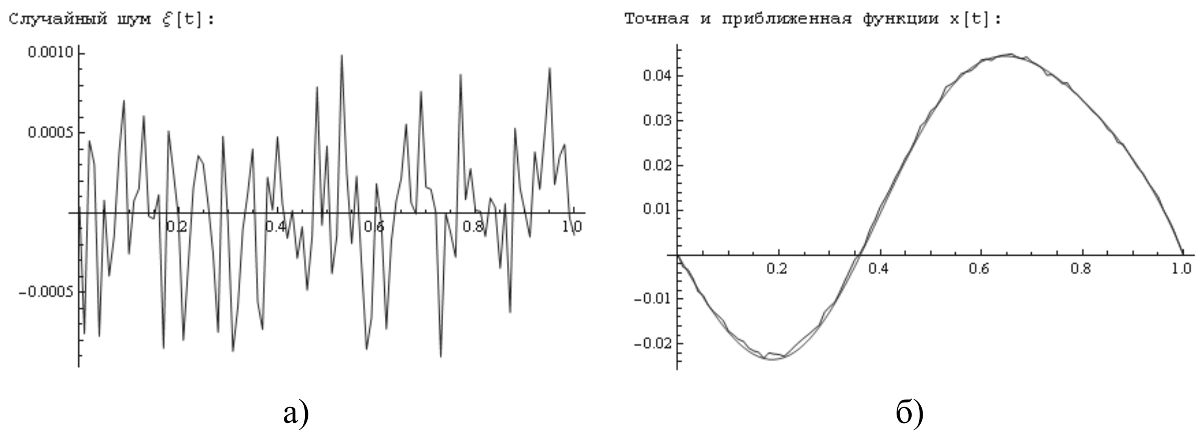
Некоторая динамическая система описывается дифференциальным уравнением (4) с граничными условиями (5)

$$x'' - 5x' + 6x = f(t), \tag{4}$$

$$x(0) = 0,\ \ x(1) = 0. \tag{5}$$

Требуется по экспериментально измеренной функции $x(t)$ установить неизвестную функции $f(t)$ – силу воздействия на систему.

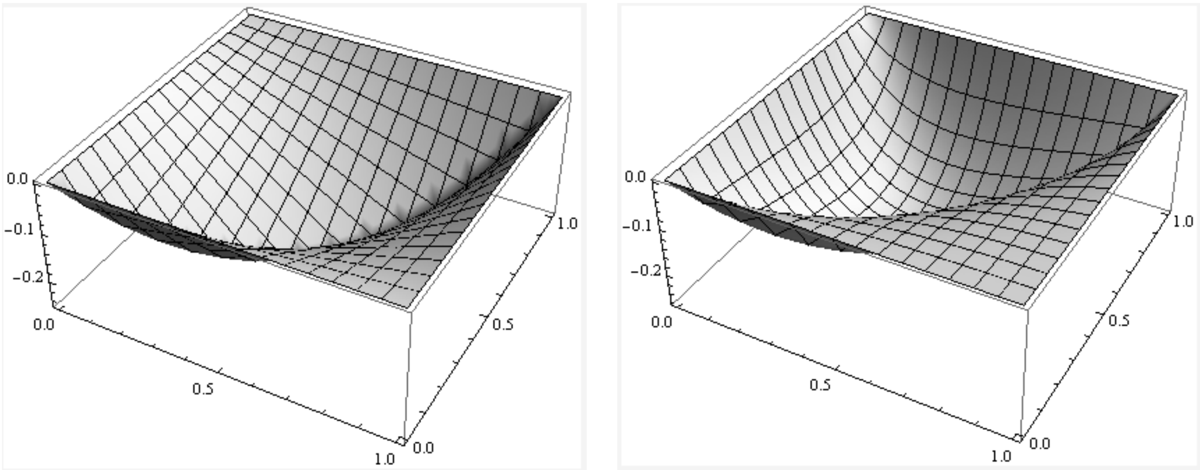
Функция $x(t)$ измерена неточно. Ошибка моделируется с помощью случайного шума $\xi(t)$. На рис. 1 изображены графики случайного шума $\xi(t)$ и измеренной функции $x(t)$.



а) б)

Рис. 1. $\xi(t)$ – высокочастотная ошибка (погрешность измерений) (а); $\tilde{x}(t)$ – измеренная функция, $x(t)$ – точная функция (б)

Функции Грина для задачи (4)–(5) представлена на рис. 2, б. На рис. 2, а представлена функция Грина соответствующей вспомогательной задачи.



а) б)

Рис. 2. Функция Грина: вспомогательной задачи $x''=f(t),\ x(0)=0,\ x(1)=0$ (а); основной задачи $x''-5x'+6x=f(t),\ x(0)=0,\ x(1)=0$ (б)

На рис. 3 представлен график решения обратной задачи теории измерений, полученного по описанному алгоритму. Для сравнения представлен график точного решения. Точное воздействие на систему описывается функцией $f(t)=\sin(10t)+\cos(5t)$.

Погрешность исходных данных составляет $\delta=10^{-3}$, что составляет около 3 %. Погрешность полученных результатов оказывается равной $\varepsilon=0{,}17$, что составляет примерно $3{,}8\,\%$.

Таким образом, в результате исполнения программы получаем погрешность результатов сравнимую с погрешностью исходных данных задачи.

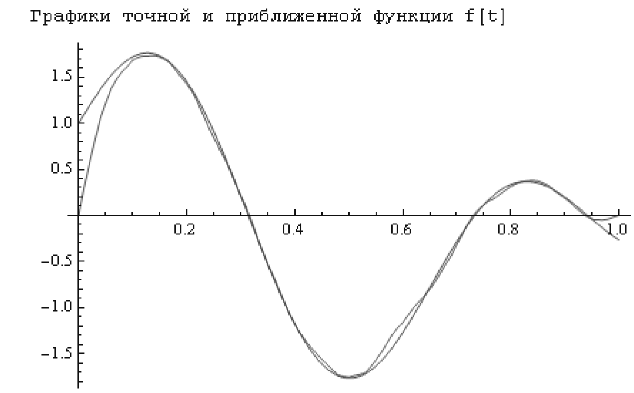


Рис. 3. Точная функция правой части $f(t)$, вычисленная функция $\tilde{f}(t)$

Библиографический список

1. Грановский, В.А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения / В.А. Грановский. – Л.: Ленинград. отд-ние, 1984. – 224 с.

2. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.

3. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

4. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

5. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

6. Асфандиярова, Ю.С. Функция Грина линейной краевой задачи с нелокальными данными / Ю.С. Асфандиярова, В.И. Заляпин // Труды Мат. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. мат. о-во, 2009. – Т. 39. – С. 128–130.

7. Асфандиярова, Ю.С. Численное решение обратной задачи теории динамических измерений / Ю.С. Асфандиярова // Тр. 41-й Всерос. молодеж. шк.-конф. «Проблемы теоретической и прикладной математики». – Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН, 2010. – С. 7–10.

8. Асфандиярова, Ю.С. Численный анализ обратной задачи теории измерений / Ю.С. Асфандиярова // Тр. 53-й науч. конф. МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Ч. VII: Управление и прикладная математика. – М.: МФТИ, 2010. – Т. 3. – С. 6–7.

9. Zalyapin, V.I. Inverse problem of the measurements theory / V.I. Zalyapin, H.V. Kharitonova, S.V. Ermakov // Inverse problems, Design and Optimization Symposium, Miami, Florida, USA. – 2007. – April 16–18. – P. 91–96.