КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ОТНОСИТЕЛЬНО МАЛЫМИ НОРМАЛИЗАТОРАМИ НЕПРИМАРНЫХ ПОДГРУПП

В.А. Антонов

Если A – произвольная подгруппа группы G, то $N(A) \geq A{\cdot}C(A)$, а индекс $|N(A) : A{\cdot}C(A)|$ определяет порядок группы внешних автоморфизмов подгруппы A, индуцированных элементами группы G. В данной работе изучается строение конечных групп G, в которых для любой непримарной подгруппы A почти все ее автоморфизмы, индуцированные элементами из G, являются внутренними. А именно, для любой такой подгруппы A индекс $|N(A) : A \cdot C(A)|$ делит некоторое простое число. Такие группы будем называть NS_{np}-группами.

Отметим, что свойство быть NS_{np}-группой переносится на подгруппы и фактор-группы.

Неабелеву конечную p-группу G условимся называть (p,n)-группой, если G обладает абелевой максимальной подгруппой T и фактор-группа $G/Z(G)$ является группой максимального класса n. В частности, (p,1)-группы это p-группы с условием $|G/Z(G)| = p^2$. Отметим еще, что если G является (p,n)-группой и $n > 1$, то $|G/G' \cdot Z(G)| = p^2$ и абелева максимальная подгруппа из G является характеристической подгруппой группы G.

Лемма ([1], теорема 1).

В неабелевой конечной p-группе G в том и только том случае индекс $|N(A) : A \cdot C(A)|$ делит p для любой подгруппы A, когда G является (p,n)-группой для некоторого числа n.

Теорема 1.

Нильпотентная группа G тогда и только тогда является NS_{np}-группой, когда выполняется одно из следующих условий:

1) групп G абелева;

2) G является p-группой для некоторого простого числа p;

3) $G = P \times H$, подгруппа H абелева, а силовская p-подгруппа P является (p,n)-группой для некоторого числа n.

Доказательство.

Если P и Q – неабелевы силовские p- и q-подгруппы из G, $G = P \times Q \times R$, а A и B – максимальные абелевы подгруппы из P и Q, соответственно, то для подгруппы $H = A \times B \times R$, индекс $|N(H) : H \cdot C(H)| = |G : H|$ делится на pq, что невозможно. Поэтому только одна силовская подгруппа группы G неабелева. Пусть P эта подгруппа и $G = P \times R$. Если A – произвольная неединичная подгруппа из P и $H = A \times R$, то из того, что индекс $|N(H) : H \cdot C(H)|$ делит p следует, что и $|N_P(A) : A \cdot C_P(A)|$ тоже делит p. В силу леммы, P является (p,n)-группой для некоторого числа n.

Достаточность следует из леммы.

В следующей теореме p, q и r – простые числа, причем $p \neq q$.

Теорема 2.

Конечная ненильпотентная разрешимая группа G в том и только том случае является NS_{np}-группой, когда выполняется один из следующих случаев:

1) $G = H \lambda P$, где H – абелева холлова p′-подгруппа из G, $|P : C_P(H)| = p$, а группа P либо абелева, либо является (p,n)-группой, и если $C_P(H)$ неабелев, то n = 1 и $P = C_P(H) \cdot \langle z\rangle$, где $z \in Z(P)$;

2) $G = H \lambda P$, $H = G \times K$, силовская q-подгруппа Q группы G является (q, 1)-группой и P действует на Q/Z(Q) неприводимо, подгруппа K абелева, а силовская p-подгруппа P группы G либо абелева, либо является (p,n)-группой, $C_P(H)$ абелев и $|P : C_P(H)| = p$;

3) $G = P \lambda \langle x\rangle$, P – силовская p-подгруппа, $|x| = q$ и для любой x-допустимой подгруппы A из P индекс

$|(N_P(A) \cap C(x)) : (A \cap C(x)) \cdot (C_P(A) \cap C(x))|$ делит p;

4) $G = P \lambda \langle x\rangle$, P – силовская p-подгруппа, $|x| = q^2$, $P \lambda\langle x^q\rangle$ является группой типа 3), для любой x-допустимой подгруппы A из P индекс $|(N_P(A) \cap$ $\cap C(x)) : (A \cap C(x)) \cdot (C_P(A) \cap C(x))|$ делит p, и если при этом $[x,A] \neq 1$, то $C_P(x^q) = (A\cap C_P(x^q))\cdot (C_P(A) \cap C(x^q))$;

5) $G = P \lambda (\langle x\rangle \times \langle y\rangle)$, $x^q = y^r = 1$, $r \neq p$, подгруппа $P \lambda \langle t\rangle$ является группой типа 3) для любого элемента t простого порядка из $\langle x\rangle \times \langle y\rangle$, и если A – допустимая подгруппа из P, то индекс

$|(N_P(A) \cap C(\langle x, y\rangle)) : (A \cap C(\langle x, y\rangle)) \cdot (C_P(A) \cap C(\langle x, y\rangle)) |$ делит p, и если, например, $x \notin C(A)$, то $C_P(y)= (A \cap C(y)) \cdot (C_P(A) \cap C(y))$;

6) $G = P \lambda(\langle x\rangle \lambda \langle y\rangle)$, $x^q = y^r = 1$, $r \neq p$, $xy \neq yx$, подгруппа $P \lambda \langle t\rangle$ является группой типа 3) для любого неединичного элемента $t\in \langle x\rangle \lambda \langle y\rangle$, и если A – $\langle x, y\rangle$-допустимая подгруппа из P, то индекс

$|(N_P(A) \cap C(\langle x, y\rangle)) : (A \cap C(\langle x, y\rangle)) \cdot (C_P(A) \cap C(\langle x, y\rangle))|$ делит p, а $C_P(x) =$ $= (A \cap C(x)) \cdot (C_P(A) \cap C(x))$;

7) $G = (F \lambda \langle x\rangle) \cdot \langle y\rangle$, $F \cdot \langle y\rangle$ – силовская p-подгруппа G, $|x| = q$, $y^P\in F$, $[x, y] \notin F$, подгруппа $F \lambda \langle x\rangle$ – группа типа 3), а $(C_P(x) \times \langle x\rangle) \cdot \langle y\rangle$ – группа типа 1), и если A – $\langle x, y\rangle$-допустимая подгруппа из P и $H = A \cdot \langle x, y\rangle$, то $|C_{N(H)}(A \lambda \langle x , y\rangle) : C(H) |$ делит p, а $C_F(x) = (A \cap C(x)) \cdot (C_F(A)\cap C(x))$;

8) $G = (F \lambda (\langle x\rangle \times \langle y\rangle)) \cdot \langle t\rangle$, F является p-группой, $x^q = y^q = 1$, $t^r \in F$, элемент t действует на $\langle x\rangle \times \langle y\rangle$ неприводимо, подгруппа $F \lambda (\langle x\rangle \times \langle y\rangle)$ является группой типа 5), при этом, если $r \neq p$, то $F \lambda \langle t\rangle$ – группа типа 3), и если A – $\langle x, y, t\rangle$-допустимая подгруппа из F, то $C_F(\langle x\rangle \times \langle y\rangle) = (A\cap C(\langle x\rangle \times$ $\times \langle y\rangle)) \cdot (C_F(A) \cap C(\langle x\rangle \times \langle y\rangle))$.

Схема доказательства.

Обозначим через F подгруппу Фиттинга группы G. Тогда, как известно, $C(F) \leq F$.

СЛУЧАЙ 1.

Подгруппа F не примарна.

Тогда F либо абелева, либо является группой из теоремы 1, а $|G : F| = p$ для некоторого простого числа p. Это означает, в частности, что $G = H \lambda P$, где H – нильпотентная холлова p′-подгруппа из G, а P – силовская p-подгруппа группы G.

Далее доказывается, что

а) если подгруппа H абелева, то G – группа типа 1) из условия теоремы;

б) если подгруппа H набелева, то G – группа типа 2).

СЛУЧАЙ 2.

Подгруппа F является p-группой для некоторого простого числа p.

Пусть A/F – минимальная нормальная подгруппа группы G/F. Тогда A/F является элементарной абелевой q-группой, $q \neq p$. Если a элемент порядка q из A и $B = F \lambda \langle a \rangle$, то из $C(B) \leq C(F) \leq F \leq B$ и определения NS_{np}-группы следует, что индекс $|A : B|$ делит q, т. е. $|A/F| \leq q^2$. Так как $|G : A \times \times C(A)| = |G : A|$ делит простое число, то возможен только один из следующих случаев: а) $|G/F| = q$; б) $|G/F| = qr$, r – простое число; в) $|G/F| = q^2r$, r – простое число, отличное от q.

В результате исследования этих случаев доказано, что

а) если $|G/F| = q$, то G – группа типа 3);

б) если $|G/F| = q^2$, то G – группа типа 4);

в) если $|G/F| = qr$, $p \neq r \neq q$ и фактор-группа G/F абелева, то G – группа типа 5);

г) если $|G/F| = qr$, $p \neq r \neq q$ и фактор-группа G/F не абелева, то G – группа типа 6);

д) если $|G/F| = pq$, то G – группа типа 7);

е) если $|G/F| = q^2r$, то G – группа типа 8).

Примеры.

Приведем простейшие примеры, показывающие, что все случаи из теоремы 2 реализуется.

Группы $G_1 = S_3 \times \langle a \rangle$, $|a| = 5$, $G_2 = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle$, $a^3 = b^4 = c^2 = 1$, $a^c = a^{-1}$, $b^c = b^{-1}$, и $G_3 = (\langle a \rangle \times Q_8) \lambda \langle c \rangle$, $a^3 = c^2 = 1$, $a^c = a^{-1}$, $[Q_8, c] = 1$, являются группами из пункта 1) теоремы.

Пусть $G = (Q_8 \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $a^9 = b^3 = 1$, $a^b = a^4$ и b действует на Q_8 как естественный автоморфизм порядка 3. Тогда G – группа типа 2) с неабелевой подгруппой P, а ее подгруппа $Q_8 \lambda \langle b \rangle$ – группа типа 2) с абелевой подгруппой P.

Группа $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle$, $a^9 = b^3 = c^2 = 1$, $a^b = a^4$, $a^c = a^{-1}$, $b^c = b$, является группой типа 3). В ней для подгрупп $H_1 = \langle a \rangle \lambda \langle c \rangle$ и $H_2 = \langle b \rangle \times \langle c \rangle$, выполняются равенства $|N(H_1) : H_1 \cdot C(H_1)| = 3$, а $N(H_2) = H_2 \cdot C(H_2)$.

Группа Фробениуса порядка 20 – простейший пример группы типа 4). Более интересным примером группы типа 4) является группа $G = ((\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \times \langle c \rangle \times \langle d \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $a^9 = b^3 = c^3 = d^3 = x^4 = 1$, $a^b = a^4$, $a^x = a^{-1}$, $b^x = b$, $c^x = cd$, $d^x = cd^2$. В этой группе для подгрупп $H_1 = \langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$ и $H_2 = \langle a \rangle \lambda \langle x^2 \rangle$ выполняются равенства $|N(H_1) : H_1 \cdot C(H_1)| = 3$, а $N(H_2) = H_2 \cdot C(H_2)$.

Группа Фробениуса порядка $7 \cdot 6$ – группа типа 5) для $r \neq q$, а $S_3 \times S_3$ для $r = q$.

Группа $GL(3;2) \cong PSL(2;7)$ содержит неабелевы подгруппы H_1 и H_2 порядков 21 и 6, соответственно. Если A – элементарная абелева группа порядка 8, то $G_1 = A \lambda H_1$ и $G_2 = A \lambda H_2$, где H_1 и H_2 действуют на A как подгруппы $GL(3;2)$, являются группами типа 6) и 7), соответственно.

Пусть $p \neq 2$. Тогда группа $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle) \lambda ((\langle x \rangle \times \langle y \rangle) \lambda \langle t \rangle)$, где $a^p = b^p = c^p = 1$, $x^2 = y^2 = t^3 = 1$, $a^x = a$, $b^x = b^{-1}$, $c^x = c^{-1}$, $a^y = a^{-1}$, $b^y = b$, $c^y = c^{-1}$, $x^t = y$, $y^t = xy$, $a^t = c$, $b^t = a$, $c^t = b$, является группой типа 8).

Библиографический список

1. Антонов, В.А. О группах с относительно малыми нормализаторами всех (всех абелевых) подгрупп / В.А. Антонов // Теория групп и ее приложения: сб. науч. тр. – Нальчик: Изд-во КБГУ, 2010. – С. 8–17.
2. Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – М.: Наука, 1996. – 288 с.
3. Антонов, В.А. Локальные конечные группы с малыми нормализаторами / В.А. Антонов // Мат. заметки. – 1987. – Т. 41, № 3. – С. 296–302.
4. Гаген, Т.М. Некоторые вопросы теории конечных групп / Т.М. Гаген // К теории конечных групп: сб. ст. – М.: Мир, 1979. – С. 13–97.