ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Я.Д. Гельруд

Под инвестиционным портфелем будем понимать некую совокупность проектов вложения капитала с целью получения прибыли. Проектами могут быть ценные бумаги, объекты недвижимости, закупка нового оборудования, строительство, ремонтные работы, подготовка помещений для сдачи в аренду и, вообще говоря, любые финансовые инструменты, приносящие доход. Каждый из таких инвестиционных проектов с финансовой точки зрения может быть описан как временной ряд чистых денежных потоков, связанных с проектом. Каждый из инвестиционных проектов может быть начат в определенном интервале дат. Таким образом, задача оптимизации инвестиционного портфеля сводится, во-первых, к выбору подмножества проектов, подлежащих реализации, и, во-вторых, определению временного графика их осуществления. Основную проблему при этом составляет задача распределения инвестором определенной суммы денег по различным альтернативным вложениям (включая и долевое участие) так, чтобы наилучшим образом достичь своих целей.

В первую очередь инвестор стремится к получению максимальной прибыли от приобретенных активов. С другой стороны, любое вложение капитала связано с риском, как получения дохода, так и возможного проигрыша. Смысл портфеля – улучшить условия инвестирования, придав совокупности проектов такие характеристики, которые недостижимы с позиции отдельно взятого проекта и возможны только при их комбинации.

Методы формирования временного ряда чистых денежных потоков для разных типов инвестиционных проектов различны, также различны способы оценки рисков. Со свободно обращаемыми ценными бумагами при оценке доходности и риска портфеля ориентируются в первую очередь на статистические данные, на динамику котировок и доходности. В случае формирования внутренней инвестиционной стратегии предприятия на первый план выступают динамические прогнозы движения денежных и материальных потоков, бизнес-планы с конкретными оценками будущих денежных потоков. В данной статье примем эти параметры заданными для каждого проекта в рассматриваемый интервал времени. Причем, для общности модели, будем считать их зависимыми от начального момента инвестиций. Объединение в одной постановке различных видов инвестиций позволяет более точно решить задачу оптимизации инвестиционной деятельности, обеспечив тем самым максимально возможный рост стоимости бизнеса.

Рассмотрим следующую оптимизационную модель.

Пусть хозяйственный субъект обладает финансовыми средствами в объеме $Q=\sum_{t=0}^{T} Q^t$ на интервале [0, T]. Известно, что эти финансовые средства он может использовать для вложения в проекты i (i=1,…,n) в период t в объемах V_i^t. Пусть чистый дисконтированный доход проекта вида i на начало периода t составляет NPV_i^t, а прогнозируемая оценка риска составляет r_i^t.

Проблема формирования инвестиционного портфеля может быть сформирована как следующая двухкритериальная задача целочисленного программирования с булевыми переменными:

Найти

$$x_i^t = \begin{cases} 1, & \text{если инвестируем в проект } i \text{ в период } t \text{ в объеме } V_i^t, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

При ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} V_i^t \cdot x_i^t \le Q^t, \forall t \in [0, T]. \tag{2}$$

Целевые функции:

1. Максимизация ожидаемой доходности

$$F_1 = \sum_{t=0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^t \cdot NPV_i^t \right) (1+d)^{-t} \to \quad \max. \tag{3}$$

2. Минимизация риска

$$F_2 = \sum_{t=0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^t \cdot r_i^t \right) (1+d)^{-t} \to \quad \min. \tag{4}$$

Оценку риска r_i^t рассматриваем как среднеквадратичное отклонение ожидаемого чистого дисконтированного дохода инвестиции *i*, начатой в период t в объеме V_i^t от всех возможных реализаций данного проекта, начатых в тот же период. Для инвестиций в ценные бумаги измерителем риска служит вычисляемая по статистическим данным величина, характеризующая размах колебаний доходности от ее трендового значения. Эти оценки имеют ту же размерность, что и V_i^t и NPV_i^t. Коэффициент дисконтирования *d* принимаем как минимально желаемый уровень доходности наших инвестиций. Так как в дальнейшем не будет производиться какой-либо свертки критериев, а будет использован метод последовательных уступок, то коэффициент дисконтирования *d* может быть применен и для второй целевой функции в качестве меры эквивалентности значений среднеквадратичного отклонения доходности разных временных периодов.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать метод последовательных уступок, заключающийся в следующем:

На первом этапе решаем задачу (1)–(3) без учета второго критерия. Получаем некоторое решение $\{x_i^t(1)\}$ со значением первой целевой функции F_1^1. Находим значение второго критерия при данном решении F_2^1. Делаем «уступку» по первому критерию (например, в размере 5 %) – $F_1^2=0{,}95F_1^1$ и переводим первый критерий в ограничение:

$$\sum_{t=0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^t \cdot NPV_i^t\right)(1+d)^{-t} \ge F_1^2. \qquad (5)$$

Затем решаем исходную задачу (1)–(2) с дополнительным ограничением (5), минимизируя вторую целевую функцию (4). Получаем новое решение $\{x_i^t(2)\}$ со значением первой целевой функции $F_1^{2'} \ge F_1^2$ и второго критерия F_2^2. Продолжаем этот пошаговый процесс, получая последовательно решения $\{x_i^t(1)\}$, $\{x_i^t(2)\}, \ldots,$ $\{x_i^t(k)\}$ с соответствующими значениями критериев.

Любое из полученных решений является Парето-оптимальным и может быть принято к реализации.

В предложенной выше постановке выбор проекта определяет однозначно объем инвестиций в него V_i^t. Усложним задачу, допустив, что объемы инвестиций в проекты *i* (*i*=1,…, *n*) в период t могут варьироваться в пределах от $V_{i\min}^t$ до $V_{i\max}^t$. При этом чистый дисконтированный доход проекта вида i на начало периода *t* при минимальном и максимальном объеме инвестиций составляет соответственно $NPV_{i\min}^t$ и $NPV_{i\max}^t$, а прогнозируемая оценка риска составляет $r_{i\min}^t$ и $r_{i\max}^t$. Статистический анализ показывает, что чистый дисконтированный доход имеет постоянную эластичность при частично инвестируемом проекте, следовательно, он описывается степенной функцией X^{α}, где X – объем инвестиций. Найдем α.

Имеем $NPV^t_{i\max} = NPV^t_{i\min}\left(\frac{V^t_{i\max}}{V^t_{i\min}}\right)^{\alpha}$, откуда

$$\alpha = \frac{\ln(NPV^t_{i\max}) - \ln(NPV^t_{i\min})}{\ln(V^t_{i\max}) - \ln(V^t_{i\min})}. \tag{6}$$

Аналогично, прогнозируемая оценка риска выражается функцией X^{β}, где

$$\beta = \frac{\ln(r^t_{i\max}) - \ln(r^t_{i\min})}{\ln(V^t_{i\max}) - \ln(V^t_{i\min})}. \tag{7}$$

Модель формирования инвестиционного портфеля в этом случае примет вид:

Найти

$$x_i^t = \begin{cases} 1, \text{ если инвестируем в проект } i \text{ в период } t, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{8}$$

V_i^t – объемы частичного инвестирования.

При ограничениях

$$V^t_{i\min} \le V_i^t \le V^t_{i\max}. \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} V_i^t \cdot x_i^t \le Q^t, \forall t \in [0, T]. \tag{10}$$

Целевые функции:

1. Максимизация ожидаемой доходности

$$F_1 = \sum_{t=0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^t \cdot (V_i^t)^{\alpha}\right)(1+d)^{-t} \to \max. \tag{11}$$

2. Минимизация риска

$$F_2 = \sum_{t=0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^t \cdot (V_i^t)^{\beta}\right)(1+d)^{-t} \to \min. \tag{12}$$

где α и β вычисляются по формулам (6) и (7).

Представленная модель позволяет не только находить объемы частичного инвестирования, но и определять размеры пакетов ценных бумаг, которые могут быть приобретены в допустимых пределах, при этом совокупный портфель будет обладать максимальной доходности при заданном (приемлемом) уровне риска.