УДК513.74

НЕПОГРУЖАЕМОСТЬ МЕТРИК ВРАЩЕНИЯ В ВИДЕ ГЕЛИКОИДАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В n-МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

А.В. Глазырина

В данной работе доказана невозможность изометрического погружения метрики вращения в n-мерное евклидово пространство в виде геликоидальной поверхности.

Непогружаемость плоскости Лобаческого в E^3 доказана Д.Гильбертом [1], а погружаемость в E^n при $n \geq 5$ установлена в работах [2, 3]. Вопрос о погружении плоскости Лобачевского в E^4 (без дополнительных ограничений на вид погружения, кроме его регулярности) остается открытым. В работе [4] Э.Р. Розендорн доказал невозможность погружения плоскости Лобачевского в E^4 в виде геликоидальной поверхности. Невозможность погружения в E^4 исследовалась также в работах [5–10].

В настоящей работе рассматривается вопрос о погружении в E^n двумерных метрик вращения

$$ds^2 = du^2 + B^2(u)dv^2 \tag{1}$$

в виде геликоидальной поверхности. Следуя Э.Р. Розендорну [4], назовем поверхность геликоидальной, если после приведения ее метрики к виду (1) коэффициенты вторых квадратичных форм и коэффициенты кручения не зависят от координаты v. Примером может служить прямой геликоид в пространстве E^3.

Теорема. Если $B_u(u)$ – неограниченная функция при $-\infty < u < +\infty$, то метрика $ds^2 = du^2 + B^2(u)dv^2$ не допускает изометрического погружения в E^n $(n \geq 3)$ в виде геликоидальной поверхности.

Доказательство: Пусть F – двумерная односвязная поверхность в E^n с внутренней метрикой неположительной кривизны. Будем считать для простоты, что на F введена единая система координат (u,v), а поверхность F задана вектор-функцией $r(u,v)$. Как обычно, $r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$, $r_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}$, $i,j = 1,2$, где $u^1 = u$, $u^2 = v$. Зафиксируем вдоль F ортонормированный базис нормалей $e_1,\ldots,e_{n-2}$. Хорошо известно, что коэффициенты первой и второй основных форм $g_{ij} = r_i r_j$, $i,j = 1,2$, $M_\alpha = r_{12}e_\alpha$, $L_\alpha = r_{11}e_\alpha$, $N_\alpha = r_{22}e_\alpha$, $\alpha = 1, 2,\ldots, n-2$; и так называемые коэффициенты кручения $A_{\alpha\beta k} = \frac{\partial e_\alpha}{\partial u^k}e_\beta$, $k = 1,2$, удовлетворяют нижеследующей системе уравнений (2)–(5).

Уравнения погружения двумерной поверхности в E^n имеют вид ($\alpha = 1, 2,\ldots, n-2$):

$$\sum_{\alpha=1}^{n-2}\left(L_\alpha N_\alpha - M_\alpha^2\right) = \left(EG - F^2\right)K \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}M_\alpha - \frac{\partial}{\partial v}L_\alpha = \Gamma_{11}^1 M_\alpha - \Gamma_{12}^1 L_\alpha + \Gamma_{11}^2 N_\alpha - \Gamma_{12}^2 M_\alpha + \sum_{\beta=1}^{n-2}\left(L_\beta A_{\alpha\beta 2} - M_\beta A_{\alpha\beta 1}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}M_\alpha - \frac{\partial}{\partial u}N_\alpha = \Gamma_{22}^1 L_\alpha - \Gamma_{12}^1 M_\alpha + \Gamma_{22}^2 M_\alpha - \Gamma_{12}^2 N_\alpha + \sum_{\beta=1}^{n-2}\left(N_\beta A_{\alpha\beta 1} - M_\beta A_{\alpha\beta 2}\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}A_{\alpha\beta 1} - \frac{\partial}{\partial u}A_{\alpha\beta 2} = \sum_{\gamma=1}^{n-2}\left(A_{\alpha\gamma 1}A_{\beta\gamma 2} - A_{\alpha\gamma 2}A_{\beta\gamma 1}\right) + g^{11}\left(L_\alpha M_\beta - M_\alpha L_\beta\right) + g^{22}\left(M_\alpha N_\beta - N_\alpha M_\beta\right), \tag{5}$$

Уравнение погружения метрики вращения $ds^2 = du^2 + B^2(u)\cdot dv^2$ в E^n:

$$ds^2 = r_u^2 du^2 + 2r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2,$$

где $r_u^2 = E = 1$, $2r_u r_v = F = 0$, $r_v^2 = G = B^2(u)$ и $K = -\frac{B_{uu}}{B}$ – кривизна метрики,

$EG - F^2 = B^2$, $\frac{\partial}{\partial v} L_\alpha = \frac{\partial}{\partial v} M_\alpha = \frac{\partial}{\partial v} A_{xy1} = 0$ и $g^{11} = 1$, $g^{22} = \frac{1}{B^2(u)}$,

коэффициенты Кристоффеля примут вид:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{0,5E_u G - FF_u + 0,5E_v F}{EG - F^2} = 0; \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{0,5G_u E - 0,5E_v F}{EG - F^2} = \frac{B_u}{B};$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{F_u E - 0,5EE_v - 0,5E_u F}{EG - F^2} = 0; \qquad \Gamma_{22}^1 = \frac{F_v G - 0,5G_u G - 0,5G_v F}{EG - F^2} = -B_u B;$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{0,5E_v G - 0,5G_u F}{EG - F^2} = 0; \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{0,5G_v E - F_v F + 0,5G_u F}{EG - F^2} = 0,$$

тогда наша система примет вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{n-2}\left(L_\alpha N_\alpha - M_\alpha^2\right) = -\frac{B_{uu}}{B}B^2;$$

$$\frac{\partial}{\partial u}M_\alpha = -\frac{B_u}{B}M_\alpha + \sum_{\beta=1}^{n-2}\left(L_\beta A_{\alpha\beta 2} - M_\beta A_{\alpha\beta 1}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial u}N_\alpha = B_u B L_\alpha + \frac{B_u}{B}N_\alpha + \sum_{\beta=1}^{n-2}\left(M_\beta A_{\alpha\beta 2} - N_\beta A_{\alpha\beta 1}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial u}A_{\alpha\beta 2} = \sum_{\gamma=1}^{n-2}\left(A_{\alpha\gamma 2}A_{\beta\gamma 1} - A_{\alpha\gamma 1}A_{\beta\gamma 2}\right) + \left(M_\alpha L_\beta - L_\alpha M_\beta\right) + \frac{N_\alpha M_\beta - M_\alpha N_\beta}{B^2}.$$

Сделаем замену:

$M_x = m_x B(u)$; $\qquad \frac{\partial}{\partial u}M_x = \frac{\partial}{\partial u}m_x B(u) + m_x B_u(u)$;

$N_x = n_x B^2(u)$; $\qquad \frac{\partial}{\partial u}N_x = \frac{\partial}{\partial u}n_x B^2(u) + 2n_x B(u)\cdot B_u(u)$;

$L_x = l_x$; $\qquad \frac{\partial}{\partial u}A_{\alpha\beta 2} = \frac{\partial}{\partial u}a_{\alpha\beta 2}B(u) + a_{\alpha\beta 2}B_u(u)$;

$A_{xy1} = a_{xy1}$; $\qquad A_{xy2} = a_{xy2}B(u)$, $\qquad$ где $x, y = \alpha, \beta$,

и первое, и третье уравнение разделим на $B^2(u)$, а второе и четвертое – на $B(u)$.

Система уравнений примет вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{n-2}\left(l_\alpha n_\alpha - m_\alpha^2\right) = -\frac{B_{uu}}{B};$$

$$\frac{\partial}{\partial u}m_\alpha = -2m_\alpha\frac{B_u}{B} + \sum_{\beta=1}^{n-2}\left(l_\beta a_{\alpha\beta 2} - m_\beta a_{\alpha\beta 1}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial u}n_\alpha = -n_\alpha\frac{B_u}{B} + l_\alpha\frac{B_u}{B} + \sum_{\beta=1}^{n-2}\left(m_\beta a_{\alpha\beta 2} - n_\beta a_{\alpha\beta 1}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial u}a_{\alpha\beta 2} = -a_{\alpha\beta 2}\frac{B_u}{B} + \sum_{\gamma=1}^{n-2}\left(a_{\alpha\gamma 2}a_{\beta\gamma 1} - a_{\alpha\gamma 1}a_{\beta\gamma 2}\right) + m_\alpha l_\beta - l_\alpha m_\beta + n_\alpha m_\beta - m_\alpha n_\beta.$$

Умножим уравнения (2), (3) и (4) соответственно на m_α, n_α, $a_{\alpha\beta 2}$ и сложим полученные уравнения:

$$\sum_{\substack{\alpha=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n-2}\left(m_\alpha\frac{\partial}{\partial u}m_\alpha + n_\alpha\frac{\partial}{\partial u}n_\alpha + a_{\alpha\beta 2}\frac{\partial}{\partial u}a_{\alpha\beta 2}\right) = -2m_\alpha^2\frac{B_u}{B} - n_\alpha^2\frac{B_u}{B} + n_\alpha l_\alpha\frac{B_u}{B} - a_{\alpha\beta 2}^2\frac{B_u}{B} + \sum,$$

где $\sum = \sum_{\alpha=1}^{n-2} m_\alpha \sum_{\beta=1}^{n-2}\left(l_\beta a_{\alpha\beta 2} - m_\beta a_{\alpha\beta 1}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n-2} n_\alpha \sum_{\beta=1}^{n-2}\left(m_\beta a_{\alpha\beta 2} - n_\beta a_{\alpha\beta 1}\right) + \sum_{\substack{\alpha=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n-2} a_{\alpha\beta 2}\sum_{\gamma=1}^{n-2}\left(a_{\alpha\gamma 2}a_{\beta\gamma 1} - a_{\alpha\gamma 1}a_{\beta\gamma 2}\right) +$

$+\sum_{\substack{\alpha=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n-2} a_{\alpha\beta 2}\left(m_\alpha l_\beta - l_\alpha m_\beta + n_\alpha m_\beta - m_\alpha n_\beta\right) = 0.$

Можно заметить, что:

$$0{,}5\frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{\substack{\alpha=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n-2}\left(m_\alpha^2 + n_\alpha^2 + a_{\alpha\beta 2}^2\right)\right) = -\frac{B_u}{B}\cdot\left(\sum_{\substack{\alpha=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n-2}\left(m_\alpha^2 + n_\alpha^2 + a_{\alpha\beta 2}^2\right)\right) + \frac{B_u}{B}\left(\sum_{\alpha=1}^{n-2}\left(l_\alpha n_\alpha - m_\alpha^2\right)\right),$$

где $\sum_{\alpha=1}^{n-2}\left(l_\alpha n_\alpha - m_\alpha^2\right) = -\frac{B_{uu}}{B}$ и обозначим $\sum_{\substack{\alpha=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n-2}\left(m_\alpha^2 + n_\alpha^2 + a_{\alpha\beta 2}^2\right) = f^2$, тогда

$0{,}5\frac{\partial}{\partial u}f^2 = -\frac{B_u}{B}\cdot f^2 - \frac{B_u\cdot B_{uu}}{B^2}$; $\quad 0{,}5\frac{\partial}{\partial u}f^2 + \frac{B_u}{B}\cdot f^2 = -\frac{B_u\cdot B_{uu}}{B^2}$ (умножим на $2B^2$);

$B^2\frac{\partial}{\partial u}f^2 + 2BB_u\cdot f^2 = -2B_uB_{uu}$; $\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(B^2 f^2\right) = -2B_uB_{uu}$.

В итоге мы получим: $f^2B^2(u) = -B_u^2(u) + C$. Равенство не выполняется для всех значений u, если функция $B_u(u)$ не ограничена. Теорема доказана.

<u>Следствие.</u> Плоскость Лобачевского $L^2(-1)$ не допускает изометрического погружения в E^n $(n\geq 3)$ в виде геликоидальной поверхности.

<u>Замечание.</u> Если $B_u(u)$ ограничена, то метрика (1) допускает погружение в виде геликоидальной поверхности в E^3 $x_1 = \frac{1}{C}B(u)\cos Cv$, $x_2 = \frac{1}{C}B(u)\sin Cv$, $x_3 = \frac{1}{C}\int\sqrt{C^2 - B_u^2}\,du$, здесь x_1, x_2, x_3 – декартовы прямоугольные координаты в E^3, $|B_u| < C = \text{const}$.

Литература

1. Гильберт Д. Основания геометрии. - М.; Л.: ОГИЗ, 1948.
2. Blanusa D. Uber die Einbettung hyperbolischer Raume in euklidische Raume // Monatsh. Math. - 1955.-Bd. 59.-№3.-S. 217-229.
3. Розендорн Э.Р. Реализация метрики $ds^2 = du^2 + f^2(u)dv^2$ *в* пятимерном евклидовом пространстве // ДАН АРМССР - 1960. - Т. 30. - № 4. - С. 197-199.
4. Оссерман Р. Минимальные поверхности // Успехи матем. наук. - 1967. - Т. 22. - Вып. 4(136). - С. 55-136.
5. Аминов Ю.А. Кручение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах // Укр. геометр, сб. - 1974. - Вып.17. - С. 3-14.
6. Кадомцев СБ. Невозможность некоторых специальных изометрических погружений пространств Лобачевского // Мат. сб. - 1978. - Т. 107. - Вып. 2. - С.175-198.
7. Розендорн Э.Р. К вопросу о погружении двумерных римановых метрик в четырехмерное евклидово пространство // Вести. МГУ. Сер.1. Математика, механика. - 1979. - № 2. - С. 47-50.
8. Ефимов Н.В. Невозможность в трехмерном евклидовом пространстве полной регулярной поверхности с отрицательной верхней гранью гауссовой кривизны // Докл. АНСССР. - 1963. - Т. 150.-№6.-С. 1206-1209.

Поступила в редакцию 15 мая 2006 г.