# РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЖОРДАНОВЫХ ИСКЛЮЧЕНИЙ

***М.В. Булгакова***

Известно несколько различных методов решения линейных алгебраических уравнений. Традиционными являются метод Крамера, метод Гаусса и матричный метод решения линейных алгебраических уравнений. Но кроме хорошо известных и изученных методов существуют и другие, такие как решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью жордановых исключений. Жорданово исключение – это удобная схема осуществления тождественных алгебраических преобразований. Мы воспользуемся ею для решения одного классического вопроса – решения простейших уравнений.

Запишем систему линейных алгебраических уравнений в виде жордановой таблицы:

| | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $b_1=$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | ... | $a_{1,n}$ |
| $b_2=$ | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | ... | $a_{2,n}$ |
| ... | ... | .... | ... | ..... |
| $b_m=$ | $a_{m,1}$ | $a_{m,2}$ | ... | $a_{m,n}$ |

Условимся столбец таблицы называть ненулевым, если среди находящихся в нем чисел $a_{ij}$ есть отличное от нуля; в противном случае столбец будет называться нулевым. Переведем с помощью жордановых исключений максимальное количество неизвестных $x_j$ в левую часть таблицы; полученный результат исследуем.

Случай 1. В таблице не оказалось ни одного разрешающего элемента (все $a_{ij}=0$). Если среди коэффициентов $b_i$ окажется хоть один отличный от нуля, то система несовместна. Если же все $b_i=0$, то система имеет в качестве решения любой набор чисел $(x_1,...,x_n)$.

Случай 2. В таблице разрешающие элементы оказались и в результате жордановых исключений слева от таблицы оказались только неизвестные $x_{i_1},...,x_{i_k}$, а над таблицей все свободные члены $b_i$ и несколько неизвестных $x_{i_1},...,x_{i_k}$. В этом случае каждое из $x_{i_1},...,x_{i_k}$ можно, дешифруя соответствующие строки в таблице, выразить линейно через те $x_j$, которые остались расположены над таблицей. Возникает запись общего решения.

Случай 3. То же, что в Случае 2, но только над таблицей переменных $x_j$ не осталось, а слева от таблицы расположены все $x_j$. В этом случае, дешифруя строки, мы получим точные значения неизвестных $x_j$. Система – определённа.

Случай 4. В результате максимального числа жордановых исключений слева от таблицы остались константы. Дешифруя каждую строку таблицы, слева от которой стоит константа, надо получить равенство и выяснить его справедливость. Если хоть одно из таких равенство окажется противоречивым (типа «5=6»), то система несовместна. В противном случае возникнет система равенств, описывающих общее решение.

Рассмотрим пример.

Пример Решить систему уравнений:

$$2x_1-3x_2+x_3=1,$$
$$3x_1+2x_2+2x_3=0,$$
$$5x_1-x_2+3x_3=1.$$

Построим рабочую таблицу:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| 1= | 2 | –3 | 1 |
| 0= | 3 | 2 | 2 |
| 1= | 5 | –1 | 3 |

Выделим разрешающий элемент:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| 1= | 2 | –3 | 1 |
| 0= | 3 | 2 | 2 |
| 1= | 5 | –1 | 3 |

Выполним соответствующее жорданово исключение:

| | 1 | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$= | 0.5 | 1.5 | –0.5 |
| 0= | 1.5 | 6.5 | 0.5 |
| 1= | 2.5 | 6.5 | 0.5 |

Выделим следующий разрешающий элемент:

| | 1 | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$= | 0.5 | 1.5 | –0.5 |
| 0= | 1.5 | 6.5 | 0.5 |
| 1= | 2.5 | 6.5 | 0.5 |

Выполним соответствующее жорданово исключение:

| | 1 | 0 | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$= | 2/13 | 3/13 | –8/13 |
| $x_2$= | –3/13 | 2/13 | –1/13 |
| 1= | 1 | 1 | 0 |

Дальнейшие жордановы исключения невозможны. Последняя строка соответствует равенству «1=1». Следовательно, система совместна и ее решение таково:

$$x_1 = 2/13 - 8/13 x_3,$$

$$x_2 = -3/13 - 1/13 x_3.$$

На практике все описанные действия сопровождаются дополнительными расчетами, которые в каждой конкретной задаче разрабатываются заново и порой представляют собой самостоятельные научные результаты.

Библиографический список

1. Березин, И.С. Методы вычислений: учебное пособие / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Наука, 1994. – Т. 1. – 464 с.

2. Бахвалов, Н.С. Численные методы: учебное пособие / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1993. – 631 с.