ИГРОВОЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ НА КОНКУРЕНТНОМ РЫНКЕ

А.С. Широносов

Рассматривается задача максимизации прибыли первой фирмы за счет выбора цены на микрорынке, на котором действуют два конкурента с однородным товаром, за заданный отрезок времени при неизвестной стратегии конкурента. Различные подходы к решению задачи оптимального ценообразования изложены в работах [4–6].

Для величины объема продаж первой фирмы используется модель с простейшим учетом распространения информации об изменении продавцами цен [3]:

$$\begin{cases} x_{1k} = x_{2k} - x_{2k-1}\,; \\ x_{2k} = x_{2k-1} + a_1 x_{3k-1} + a_2 x_{4k-1}\,; \\ x_{3k} = \left(1 - \dfrac{1}{T}\right) x_{3k-1} + \dfrac{1}{T} u_{1k-1}\,; \\ x_{4k} = \left(1 - \dfrac{1}{T}\right) x_{4k-1} + \dfrac{1}{T} u_{2k-1}, k = 1,2,\dots,N, \end{cases} \tag{1}$$

где N – число дней в месяце, x_{1k} – объем проданного товара первой фирмой в k-й день, x_{2k} – объем проданного товара первой фирмой нарастающим итогом, u_{1k} – цена первой фирмы на товар в k-й день, u_{2k} – цена конкурента на товар в k-й день, x_{3k} – влияние собственной цены на объем продаж, x_{4k} – влияние цены конкурента на объем продаж. Параметр T>1 в модели (1) определяет скорость распространения среди покупателей информации об изменении цен продавцов и принят равным 3,5. Процедура идентификации параметров a_1, a_2 модели (1), определяющих величину переменного роста объема продаж, произведена для реальных данных микрорынка АЗС г. Екатеринбург в математическом пакете Matlab.

Введем переменную x_{5k} – объем проданного товара конкурентом нарастающим итогом. Будем предполагать, что объем продаж конкурента можно описать аналогичным уравнением:

$$x_{5k} = x_{5k-1} + a_1 x_{4k-1} + a_2 x_{3k-1}, k = 1,2,\dots,N. \tag{2}$$

Величина объема продаж конкурента в первый день месяца неизвестна, но будем считать, что можем задать отрезок, которому она принадлежит, на основании данных об объеме продаж первой фирмы в первый день:

$$x_{5,1} \in \left[x_{1,1} - 2000, x_{1,1} + 2000\right]. \quad (3)$$

Заметим, что используемая модель рынка не предполагает уход потребителей с данного рынка на другой, они могут только переходить от одной фирмы к другой на данном рынке.

Решим задачу максимизации прибыли за месяц первой фирмы за счет выбора цены. Будем считать, что первая фирма может менять цены 1 раз в неделю на 3 %, конкурент может менять свои цены раз в неделю на 5 %, действия конкурента направлены на максимизацию собственной прибыли. Никаких других ограничений сверху на цены не учитываем. Предположим также, что нам известен объем продаж первой фирмы за первый день месяца $x_{1,1}$,цены (цена первой фирмы u_0 и цена конкурента $u_{2,0}$ за единицу товара) на товар на неделю, предшествующую периоду начала управления, себестоимость единицы товара постоянна и равна c_b для обоих участников рынка.

С точки зрения теории игр такую задачу можно рассматривать как задачу отыскания оптимальной стратегии в бескоалиционной неантагонистической дискретной игре двух участников. В теории бескоалиционных игр предложены различные виды решений (равновесия по Бержу, Нэшу, равновесие угроз и контругроз, активное равновесие [1]). Среди них широкое распространение получило равновесное решение по Нэшу, содержательный смысл которого состоит в том, что в отклонении от этой ситуации отдельный игрок не заинтересован, так как при таком отклонении его выигрыш увеличиться не может, но может и уменьшиться [2].

Сформируем множества стратегий для первой фирмы и конкурента U^1и U^2 соответственно, в предположении, что конкурент волен выбирать цены в чуть более широком диапазоне:

$$U^1 = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) | u_i \epsilon u_{i-1} \pm 0{,}03 u_{i-1}, i = 1, .., 4\}$$

$$U^2 = \left\{\left(u_{2,1}, u_{2,2}, u_{2,3}, u_{2,4}\right) \middle| u_{2,i} \epsilon u_{2,i-1} \pm 0{,}05 u_{2,i-1}, i = 1, .., 4\right\}. \quad (4)$$

На основании модели (1) получим следующее выражение для целевой функции (прибыли) первой фирмы:

$$\begin{gathered}\Pi_1 = k_{11}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) + k_{12}u_1u_2 + k_{13}u_1u_3 + k_{14}u_1u_4 + \\ + k_{12}u_2u_3 + k_{13}u_2u_4 + k_{12}u_3u_4 + q_{11}u_1 + q_{12}u_2 + q_{13}u_3 + q_{14}u_4 \\ + k_{21}u_1u_{2,1} + k_{22}u_2u_{2,1} + k_{21}u_2u_{2,2} + k_{23}u_3u_{2,1} + k_{22}u_3u_{2,2} \\ + k_{21}u_3u_{2,3} + k_{24}u_4u_{2,1} + k_{23}u_4u_{2,2} + k_{22}u_4u_{2,3} + k_{21}u_4u_{2,4} \\ + q_{21}u_{2,1} + q_{22}u_{2,2} + q_{23}u_{2,3} + q_{24}u_{2,4} + R,\end{gathered} \quad (5)$$

где u_i – цена первой фирмы на i-й неделе, $u_{2,i}$ – цена конкурента на i-й неделе ($i = 1, .., 4$). На цены первой фирмы и цены конкурента накладываются следующие ограничения:

$$u_i \epsilon u_{i-1} \pm 0{,}03 u_{i-1},$$
$$u_{2,i} \epsilon u_{2,i-1} \pm 0{,}05 u_{2,i-1}, i = 1, \dots, 4. \quad (6)$$

Начальные значения для влияний цены первой фирмы и цены конкурента на объем продаж устанавливаются, исходя из известных цен на неделю, предшествующую периоду начала управления:

$$x_{31} = u_0, x_{41} = u_{2,0}. \quad (7)$$

Коэффициенты и свободный член в выражении для прибыли (5) рассчитываются по формулам:

$$k_{j1} = \frac{a_j}{T}(5 + 4\left(1 - \frac{1}{T}\right) + 3\left(1 - \frac{1}{T}\right)^2 + .. + \left(1 - \frac{1}{T}\right)^4),$$
$$c_1 = (a_1 x_{31} + a_2 x_{41})(1 + \left(1 - \frac{1}{T}\right) + \left(1 - \frac{1}{T}\right)^2 + .. + \left(1 - \frac{1}{T}\right)^5),$$
$$k_{j2} = \frac{a_j}{T}(2 + 3\left(1 - \frac{1}{T}\right) + 4\left(1 - \frac{1}{T}\right)^2 + .. + 7\left(1 - \frac{1}{T}\right)^5 + 6\left(1 - \frac{1}{T}\right)^6 + .. + \left(1 - \frac{1}{T}\right)^{11}),$$
$$c_2 = (a_1 x_{31} + a_2 x_{41})\left(1 - \frac{1}{T}\right)^6 + \left(1 - \frac{1}{T}\right)^7 c_1,$$
$$k_{j3} = \left(1 - \frac{1}{T}\right)^7 c_{j2} + \frac{1}{T}\left(1 - \frac{1}{T}\right)^6 a_j, c_3 = \left(1 - \frac{1}{T}\right)^7 c_2,$$
$$c_4 = \left(1 - \frac{1}{T}\right)^7 c_3, k_{j4} = \left(1 - \frac{1}{T}\right)^7 k_{j3}, j = 1{,}2,$$
$$q_{11} = x_{1,1} + c_1 - c_b(k_{11} + k_{12} + k_{13} + k_{14}),$$
$$q_{12} = c_2 - c_b(k_{11} + k_{12} + k_{13}),$$
$$q_{13} = c_3 - c_b(k_{11} + k_{12}), q_{14} = c_4 - c_b k_{11},$$
$$q_{21} = -c_b(k_{21} + k_{22} + k_{23} + k_{24}),$$
$$q_{22} = -c_b(k_{21} + k_{22} + k_{23}),$$
$$q_{23} = -c_b(k_{21} + k_{22}), q_{24} = -c_b k_{21},$$
$$R = -c_b\left(x_{1,1} + c_{11} + c_{21} + c_{12} + c_{22} + c_{13} + c_{23} + c_{14} + c_{24}\right).$$

Выражение для прибыли конкурента имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi_2 = {} & k_{11}\left(u_{2,1}^2 + u_{2,2}^2 + u_{2,3}^2 + u_{2,4}^2\right) + k_{12} u_{2,1} u_{2,2} + k_{13} u_{2,1} u_{2,3} \\ & + k_{14} u_{2,1} u_{2,4} + k_{12} u_{2,2} u_{2,3} + k_{13} u_{2,2} u_{2,4} + k_{12} u_{2,3} u_{2,4} + \overline{q_{11}} u_{2,1} \\ & + q_{12} u_{2,2} + q_{13} u_{2,3} + q_{14} u_{2,4} + k_{21} u_{2,1} u_1 + k_{22} u_{2,2} u_1 + k_{21} u_{2,2} u_2 \\ & + k_{23} u_{2,3} u_1 + k_{22} u_{2,3} u_2 + k_{21} u_{2,3} u_3 + k_{24} u_{2,4} u_1 + k_{23} u_{2,4} u_2 \\ & + k_{22} u_{2,4} u_3 + k_{21} u_{2,4} u_4 + q_{21} u_1 + q_{22} u_2 + q_{23} u_3 + q_{24} u_4 + \bar{R}. \end{aligned} \quad (8)$$

В выражении (8) неизвестные коэффициент $\overline{q_{11}}$ и свободный член $\bar{R}$ рассчитываются по формулам:

$$\overline{q_{11}} = x_{5,1} + c_1 - c_b(k_{11} + k_{12} + k_{13} + k_{14}),$$
$$\bar{R} = -c_b\left(x_{5,1} + c_{11} + c_{21} + c_{12} + c_{22} + c_{13} + c_{23} + c_{14} + c_{24}\right).$$

В нашем случае ситуация $(U_1^*, U_2^*) \in U^1 \times U^2$ будет равновесной по Нэшу при выполнении условий [2]:

$$\Pi_1(U_1^*, U_2^*) \geq \Pi_1(U_1, U_2^*)$$
$$\Pi_2(U_1^*, U_2^*) \geq \Pi_2(U_1^*, U_2), U_1 \in U^1, U_2 \in U^2. \quad (9)$$

Подсчет компонент градиентов целевых функции при заданных параметрах (найденных при идентификации $a_1 = -344$ и $a_2 = 849$, известных заранее $u_0 = u_{2,0} = 20{,}2$, $T = 3.5$, $x_{1,1} = 9673$, а также предполагаемом $x_{5,1} = x_{1,1} + 500$) показывает, что функции прибыли являются возрастающими по всем аргументам. С учетом этого, а также определения равновесия по Нэшу получаем, что равновесная ситуация достигается на верхней границе множеств стратегий, что соответствует выбору *максимально допустимых цен* как первой фирмой, так и конкурентом.

При выборе найденного варианта изменения цены удается увеличить прибыль за месяц на 18 % по сравнению с исходным вариантом изменения цены.

Рассмотрен подход к решению задачи максимизации прибыли фирмы на микрорынке, на котором действуют два конкурента и потребители, за счет выбора цены, использующий аппарат теории бескоалиционных неантагонистических игр.

Осуществлялся поиск равновесия по Нэшу и получено следующее: равновесие достигается при постоянном повышении цен на товар всеми участниками рынка. В результате прибыль за месяц увеличивается на 18 % по сравнению с исходным вариантом изменения цены, уже реализовавшемся на рынке.

Библиографический список

1. Жуковский, В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности / В.И. Жуковский. – М., 1997. – 461 с.

2. Жуковский, В.И. Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности / В.И. Жуковский, Л.В. Жуковская. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.

3. Тиссен, Е.В. Моделирование динамики микрорынка / Е.В. Тиссен, А.С. Шелудько, В.И. Ширяев // Сб. тр. Междунар. науч.-практ. конф. «Роль науки в устойчивом развитии общества». – Тамбов, 2010. – С. 115–117.

4. Петросян, Л.А. Дифференциальные игры в менеджменте / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич // Научные доклады. – 2006. – №38(R).

5. Dockner, E.J. Dynamic Advertising and S Pricing in an Oligopoly: A Nash Equilibrium Approach / E.J. Dockner, G. Feichtinger // Dynamic Games and Applications in Economics / T. Basar. – Berlin: Springer-Verlag, 1986. – P. 238–251.

6. Dockner, E.J. Optimal pricing in a dynamic duopoly game model / E.J. Dockner // Mathematical Methods of Operations Research. – 1985. – Vol. 29. – P. 2–17.