

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ РАСТЯГИВАЕМОЙ ПОЛОСЫ ПРИ ГИПОТЕЗЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ**

*А.И. Носачева*

Менее прочные (МП) слои являются неизбежным следствием многих существующих технологий производства сварных соединений. Исследование возникающего в МП слоях контактного упрочнения позволяет точнее оценить несущую способность неоднородных соединений, содержащих

такие слои. При математическом моделировании напряжённо-деформированного состояния (НДС) МП слоя возникают недоопределённые краевые задачи для систем уравнений в частных производных гиперболического типа. Недостаток краевых условий обычно компенсируется ограничениями на классы решений на основе «частичного предугадывания внутреннего состояния материала». Естественным ограничением такого вида является гипотеза плоских поперечных сечений (ГППС)  $v_y = W(y)$ , где  $v_y$  – скорость перемещения точек слоя в поперечном направлении. На основе ГППС проведено исследование НДС поперечного МП слоя полосы при растягивающей нагрузке в случае плоской деформации [1]. Естественным уточнением ГППС являются гипотезы, учитывающие прогиб плоских сечений при поперечном растяжении слоя  $v_y = W(y)(1 + \varphi(x, \delta))$ , где  $\varphi$  – некоторая «малая» величина, характеризуемая малым параметром  $\delta$ . Например, в гипотезе параболических сечений, использованной при математическом моделировании напряжённого состояния прослоек в стержнях  $\varphi(x, \delta) = -\delta x^2$ . При плоской деформации  $\varphi(x, \delta) = -\delta x^2$  не вполне удобно.

В работе применяется гипотеза  $\varphi(x, \delta) = -2 \sin^2 \frac{\delta x}{2}$ , то есть

$$v_y = W(y) \cos(\delta x). \quad (1)$$

Цель работы – исследование напряжённого состояния МП слоя при гипотезе (1) и сравнение результатов с результатами, основанными на ГППС.

Как известно, НДС пластической среды при плоской деформации определяется системой уравнений

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4K^2; \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}. \quad (6)$$

Функции, входящие в уравнения (2)–(6), определены на прямоугольнике  $[-1; 1] \times [-\kappa; \kappa]$ , где  $\kappa \in (0; 1]$  – относительная толщина МП слоя.

Введём обозначения  $Y(y) = \frac{W''(y)}{W'(y)} + \delta^2 \frac{W(y)}{W'(y)}$ . Получим из (1) и (6)

$$\tau_{xy} = \frac{1}{4\delta} (\sigma_x - \sigma_y) Y(y) \operatorname{tg}(\delta x).$$

Подставив полученное выражение для  $\tau_{xy}$  в (4), найдём

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm \frac{4K}{\sqrt{4 + Y^2(y) \frac{\operatorname{tg}^2(\delta x)}{\delta^2}}} = \pm 2K \left( 1 - \frac{1}{8} Y^2(y) \frac{\operatorname{tg}^2(\delta x)}{\delta^2} + \frac{3}{128} Y^4(y) \frac{\operatorname{tg}^4(\delta x)}{\delta^4} - \dots \right)$$

(знак плюс соответствует растяжению соединения, знак минус – сжатию; в работе рассматривается растяжение). Отсюда

$$\tau_{xy} = \frac{Y(y) \operatorname{tg}(\delta x)}{2\delta} - \frac{Y^3(y) \operatorname{tg}^3(\delta x)}{16\delta^3} + \frac{3Y^5(y) \operatorname{tg}^5(\delta x)}{256\delta^5} - \dots \quad (7)$$

При малых значениях касательных напряжений можно считать, что

$$\tau_{xy} = \frac{Y(y) \operatorname{tg}(\delta x)}{2\delta}; \quad (8)$$

$$\sigma_y - \sigma_x = 2 \left( 1 - \frac{1}{8} Y^2(y) \frac{\operatorname{tg}^2(\delta x)}{\delta^2} \right). \quad (9)$$

Из (2) и (3) следует:  $-\frac{\partial^2(\tau_{xy}^2)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0$ . Подставив сюда (8) и

(9), получим в силу граничного условия задачу

$$Y''(y) + 2YY' = 0, \quad Y(0) = 0. \quad (10)$$

Результаты будут немного точнее, если количество слагаемых увеличить на одно, воспользовавшись равенством (7). После соответствующих рассуждений и преобразований аналог дифференциального уравнения (10) будет выглядеть следующим образом:

$$Y'' + 2YY' - \delta^2 Y = 0. \quad (11)$$

Аналитическим решением данного уравнения при начальных условиях  $Y(0) = 0, Y'(0) = A$  является функция

$$\begin{aligned} Y(y) = & \sqrt{A} \operatorname{th}(\sqrt{A}y) + \left( \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{sh} 2\sqrt{A}y \ln |ch \sqrt{A}y| - 2y \operatorname{ch}^2 \sqrt{A}y + \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{sh} 2\sqrt{A}y \right) \delta^2 + \\ & + \left[ \frac{2 \ln 2 - 1}{A} y + \frac{y^2}{\sqrt{A}} + \left( 2 + \frac{8}{3} \ln 2(A-1) + \frac{4 \ln^2 2}{3} \right) y^3 + \right. \\ & \left. + \left( 2\sqrt{A} \ln 2 - \frac{2}{\sqrt{A}} + 2A\sqrt{A} - \frac{4\sqrt{A}}{3} \right) y^4 + \left( \frac{4}{15} A \ln^2 2 - \frac{12}{5} A + \frac{8}{15} A^2 \ln 2 + \frac{16}{5} A^2 \right) y^5 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{y^2}{\sqrt{A}} + \frac{5}{2A\sqrt{A}} \right) \operatorname{sh} 2\sqrt{A}y - \frac{3y}{2A} \operatorname{ch} 2\sqrt{A}y - \\
& - \left( \frac{1}{2A\sqrt{A}} + \frac{2y}{\sqrt{A}} \right) \operatorname{th} \sqrt{A}y \Big] \cdot \operatorname{ch} \sqrt{A}y \delta^4 + \dots
\end{aligned} \tag{12}$$

Численные эксперименты показали, что решение (12) и решения уравнений (10) и (11) при условиях  $Y(0)=0$  и  $Y(\kappa)=b$  при различных подходящих значениях  $\kappa$  и  $b$  мало различаются. Поэтому используем уравнение (10). Точность основанных на них решений достаточна для приложений и позволяет получить не слишком громоздкие аналитические выражения в силу простоты решений задачи. Общее решение задачи (10) имеет вид

$$Y = \sqrt{A} \operatorname{th}(\sqrt{A}y),$$

где  $A$  – некоторая положительная постоянная.

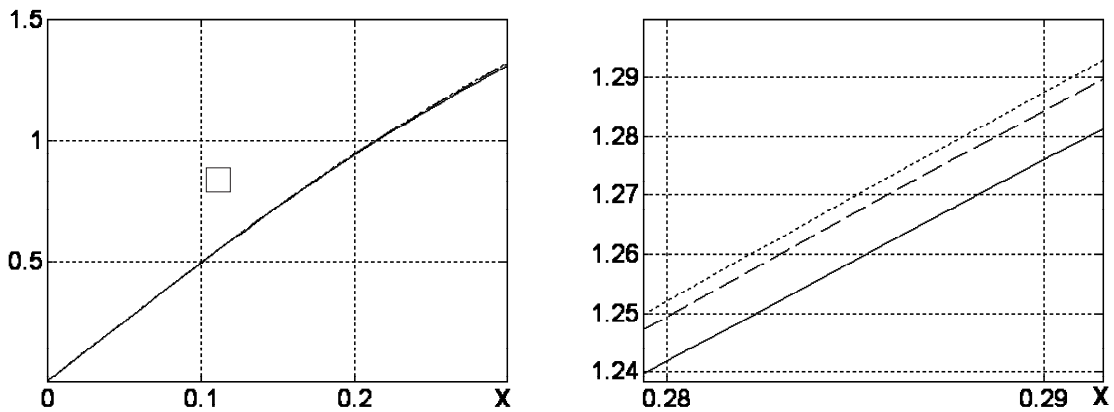


Рис. 1. Графики решения краевых задач для уравнений (10) – сплошная и (11) – штриховая, график функции (12) – пунктирная.  $\kappa = 0,3$  и  $K = 1,3$ ;  $x \in [0; 0,3]$  (справа – выделенный фрагмент)

При малых значениях касательных напряжений можно считать, что  $\tau_{xy} = \frac{\sqrt{A} \operatorname{th}(\sqrt{A}y)}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\delta x)}{\delta}$ . Постоянная  $A$  находится из граничного условия  $\tau(x_F, \kappa) = \tau_F$ . Пусть наибольшее значение  $\tau_F$  касательных напряжений  $\tau_{xy}$  достигается в некоторой точке  $F$  с абсциссой  $x_F$  на контактной поверхности  $y = \kappa$ . Тогда для вычисления  $A$  следует решать трансцендентное уравнение  $\sqrt{A} \kappa \operatorname{th}(\sqrt{A} \kappa) = \frac{2\delta \tau_F \kappa}{\operatorname{tg}(\delta x_F)}$ . Введём обозначение. Пусть  $y = a \operatorname{th} d(x)$  – функция, обратная к функции  $x = y \operatorname{th} y$ . Для малых значе-

ний аргумента эта функция хорошо аппроксимируется функцией

$\psi(x) = \sqrt{x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2}$ , которая даёт ошибку в несколько тысячных. При

$\kappa = 0,3$  и  $K = 1,3$  значение параметра  $A = 5,0024$ . Из уравнений равновесия

$$\sigma_x = \frac{A \ln |\cos(\delta x)|}{2\delta^2 \operatorname{ch}^2(\sqrt{A}y)} - \frac{\ln |\operatorname{ch}(\sqrt{A}y)|}{2} + c;$$

$$\sigma_y = -\frac{\ln |\operatorname{ch}(\sqrt{A}y)|}{2 \cos^2(\delta x)} + \frac{A \ln |\cos(\delta x)|}{2\delta^2} + 2 + c;$$

$$c = \sigma_F + \frac{\ln |\operatorname{ch} \sqrt{A} \kappa|}{2 \cos^2(\delta x_F)} - \frac{A \ln |\cos(\delta x_F)|}{2\delta^2} - 2; \quad \sigma_F = 2 + \frac{(K-1)(3-K)}{2}.$$

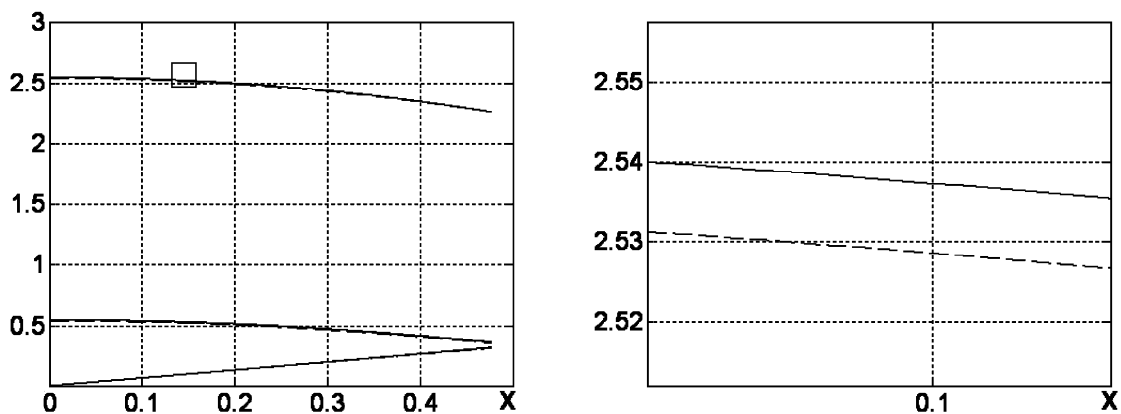


Рис. 2. Напряжения  $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$  (сверху вниз) для значения  $\delta = 0,5$  – сплошная и по ГППС – пунктирная.  $\kappa = 0,3; K = 1,3; x_F = 1 - \frac{4\kappa}{K+1}, x \in [0, x_F]$  (справа – выделенный фрагмент)

На рис. 2 показаны эпюры напряжений на контактной поверхности при гипотезе сечений данной работы при  $\delta = 0,5$  и ГППС. Видно, что математические модели НС на основе ГППС практически не уступают по точности вычисления напряжений моделям, более детально учитывающим особенности деформирования МП слоёв.

#### Библиографический список

1. Дильман, В.Л. Математические модели напряжённого состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.