ПОСТРОЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГРУПП

А.В. Каргаполов

Ранее в [1–2] полностью были описаны группы $U\left(Z\left(ZA_n\right)\right)$ в случае, когда ранг равен 1, то есть когда $n\in\left\{5,6,10,11,13,16,17,21,25\right\}$. Планируется к публикации статья автора в журнале «Вестник ЮУрГУ», в которой полностью описывается группа $U\left(Z\left(ZA_{14}\right)\right)$, в этом случае ранг $U\left(Z\left(ZA_{14}\right)\right)$ равен 3.

Целью данной работы является построение локальных центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп по таблице характеров группы A_n для произвольного натурального n.

Обозначение 1. Пусть χ – нецелый неприводимый характер группы A_n, нецелыми значениями χ являются $(1+b\sqrt{d})/2$ и $(1-b\sqrt{d})/2$, где b – натуральное число, d – целое число свободное от квадратов.

В данной работе рассматриваются локальные единицы, в соответствии с [3] $u(\lambda)=\sum\gamma_i y_i$ – локальная единица $U(Z(ZA_n))$:

$$\gamma_i=\frac{tr(\chi(x_i)(\lambda-1))}{z}, \tag{1}$$

где λ – единица кольца $Z[b\omega_d]$, $\omega_d=(1+\sqrt{d})/2$, $z=|A_n|/\deg\chi$, y_i – классовые суммы для классов с представителями x_i, γ_i – целые числа.

1. Таблица характеров A_n

Для того чтобы найти нецелые неприводимые характеры A_n потребуется таблица характеров знакопеременной группы. Таблицу характеров можно получить в системе GAP[4] с помощью команды CharacterTable(“An”), к сожалению, данная команда работает только для небольших n. На компьютере автора было получено ограничение $n\le 17$.

Таблицы характеров групп перестановок можно получить с помощью теоремы Мурнагана–Накаямы:

Лемма 1. *[Предложение 1.2 [5]] Пусть* $\alpha\in P(n)$, $k\in N$, x *– произвольная перестановка элементов* $1,\ldots,n-k$, *и* z *– циклическая перестановка остальных* k *элементов* $n-k+1,\ldots,n$. *Тогда*

$$\chi^{\alpha}(z\times x)=\sum_{\substack{(i,j)\in[\alpha]\\ h_{ij}^{\alpha}=k}}(-1)^{l_{ij}^{\alpha}}\chi^{\alpha^{ij}}(x), \tag{2}$$

где l_{ij}^{α} *– длина ноги крюка* H_{ij}^{α} *(при этом считается, что* $\chi^{0}(x)=1$, *а пустая сумма равно нулю).*

На основании таблицы характеров S_n строится таблица характеров A_n, формулы описываются в предложениях 1.3–1.5 [5].

Реализация данных рекуррентных формул на Java позволила автору построить таблицы характеров для $n\le 60$. Так как таблица является квадратной, а количество строк и столбцов в ней равно количеству классов сопряженных элементов, то данные таблицы достаточно громоздки. Количество классов сопряженных элементов для конкретной группы зависит от n и имеет порядок $e^{\sqrt{n}}$.

2. Единицы квадратичных полей нецелых характеров A_n

После того, как таблицы характеров получены, следует поиск единиц квадратичных полей нецелых характеров, они нужны, чтобы найти целые коэффициенты перед классовыми суммами в формуле (1).

Единицы квадратичного поля являются степенью основной единицы [6]. В §16.5 [6] приводится алгоритм поиска основной единицы, основанный на разложении $\sqrt{D}$ в непрерывную дробь. В случае характеров A_n раскладывать в непрерывную дробь нужно $b\sqrt{d}$. Этот алгоритм также реализован и работает достаточно быстро для A_n, $n \le 60$.

Для того чтобы получить локальную центральную единицу группы $U\left(Z\left(ZA_n\right)\right)$, нужно найти такую степень основной единицы ε кольца $Z[b\omega_d]$, чтобы все γ_i из (1) были целыми.

Воспользуемся следующим ограничением на коэффициенты λ, чтобы найти нужную степень:

Лемма 2. *Локальная единица* $u(\lambda) \in U_n\left(Z\left(ZA_n\right)\right)$, $\lambda = \alpha + \beta\omega_d$ *тогда и только тогда, когда для некоторого целого* t

$$\begin{cases} a = 1 + \dfrac{z}{2}\dfrac{bd+1}{bd}t, \\ \beta = -\dfrac{z}{bd}t. \end{cases} \tag{3}$$

По-другому $u(\lambda) \in U_n\left(Z\left(ZA_n\right)\right)$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda \in 1 + zZ\left[b\omega_d\right]$.

Так как в итоге в формуле (1) интересует делимость на z, то для поиска нужной степени коэффициенты можно искать по модулю z.

Воспользуемся китайской теоремой об остатках и разложим z на степени простых чисел $z = \prod_i p_i^{k_i}$. Будем решать задачу независимо для каждого простого числа, а затем найдем решение исходной задачи для z путем пересечения множества подходящих степеней ε для подзадач.

Воспользуемся следующим алгоритмом для решения подзадачи:

Теорема 1. *Существует рекуррентный алгоритм поиска такого* $\lambda = \varepsilon^i = \alpha_i + \beta_i\omega_d$, *что выполняется условие (3) по модулю* p^k. *При этом данный алгоритм не требует построения всей периодической последовательности пар коэффициентов по модулю* p^k.

Доказательство. Решим задачу для p, так как p всегда меньше либо равно n, то можно считать, что p не очень большое число и задача построения периодической последовательности пар коэффициентов α, β по данному модулю не является трудоемкой.

Покажем способ нахождения решения для модуля p^k, если задача уже решена для p^{k-1}.

Пусть решением задачи по модулю p^{k-1} является набор степеней $i_1,...,i_m$, тогда набор $i_1, 2i_1,..., pi_1,...,i_m,..., pi_m$ содержит все степени, которые являются решением задачи по модулю p^k. Для получения решения по модулю p^k достаточно проверить данный набор, а не строить всю последовательность.

Вычислить ε^i можно, например, с помощью быстрого возведения в степень, которое работает за время $O(\log i)$.

Таким образом, получен достаточно эффективный алгоритм, который не требует построения всей последовательности пар коэффициентов. *Теорема доказана.*

3. Разработка программы построения единиц $U(Z(ZA_n))$

На основе леммы 1, леммы 2 и теоремы 1 автором была разработана программа построения единиц $U(Z(ZA_n))$.

Алгоритм работы программы для конкретного n:

1. Построение таблицы характеров группы A_n на основе леммы 1.
2. Проход по списку нецелых характеров, для каждого характера переход на шаг (3).
3. Поиск основной единицы квадратичного поля характера.
4. Вычисление z для данного характера, разложение в произведение степеней простых чисел, применение алгоритма из теоремы 1, поиск нужных степеней основной единицы на основе решения подзадач.
5. Вывод результата для каждого характера.

4. Полученные результаты

С помощью приведенного способа было построено достаточно много центральных единиц группы $U(Z(ZA_n))$, только для $n = 60$ таких единиц 134. Приведем значения единиц колец $Z[b\omega_d]$ только для первых нецелых характеров. Единицы представлены в виде степеней основных единиц, так как если вычислить степень, то коэффициенты будут очень большими числами. Сами локальные единицы $u(\lambda)$ можно вычислить по формуле (1), но коэффициенты опять же будут очень большими.

n	χ	$\chi(x)$	λ
10	χ_{20}	ω_{21}	$(2+\omega_{21})^{180}$
20	χ_{189}	$-1+3\omega_{21}$	$(43+24\omega_{21})^{18432000}$
30	χ_{547}	ω_{29}	$(2+\omega_{29})^{2\,934\,625\,075\,200\,000}$
40	χ_{2581}	ω_{465}	$(15135+1472\omega_{465})^{3\,601\,391\,293\,059\,563\,520\,000}$
50	χ_{905}	ω_{141}	$(87+16\omega_{141})^{322\,371\,452\,484\,553\,396\,558\,233\,600\,000\,000\,000}$
60	χ_{7989}	$-1+3\omega_{85}$	$(37+9\omega_{85})^{1\,231\,904\,469\,093\,354\,007\,574\,953\,819\,680\,872\,910\,02}$

Результаты вычислений.

Библиографический список

1. Алеев, Р.Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп / Р.Ж. Алеев // Матем. труды, 3. – 2000. – № 1. – С. 3–37.
2. Алеев, Р.Ж. Полное описание групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп в случае, когда группа центральных единиц имеет ранг 1 / Р.Ж. Алеев, В.В. Соколов // Труды института математики, 15. – 2009. – № 2 – С. 3–11.
3. Алеев, Р.Ж. Центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп: дис. … д-ра физ.-мат. наук / Р.Ж. Алеев. – Челябинск, 2000. – 355 с.
4. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms and Programming. Ver. 4.4.12. 2008. – http://gap-system.org.
5. Белоногов, В.А. О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n и A_n / В.А. Белоногов // Труды института математики. – 13. – № 1(2007). – С. 11–43.
6. Хассе, Г. Лекции по теории чисел / Г. Хассе. – М.: Наука, 1953.