# ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИЙ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

***И.А. Тетин***

Пусть страховая компания имеет доход, который состоит из двух частей: доход от андеррайтинговой деятельности и доход от инвестиционной деятельности, $S(t)=U(t)+I(t)$, $t=0,1,...,T$ номер месяца.

Страховые резервы формируются за счет полученных премий для обеспечения обязательств в месяце $(t-1)$. Инвестиционные активы полагаем равными доле $k^0(t)\in(0,1)$ страховых резервов, $IR(t)=k^0(t)\cdot SR(t-1)$. Доступные инвестиционные активы $IR(t)$ составляют инвестиционный портфель из рисковых и безрисковых активов. Пусть $\delta(t)\in[0,1]$ – доля инвестиционных активов $IR(t)$, инвестируемых в рисковые активы в инвестиционном портфеле. Стратегия $\delta(t)$ выбирается предсказуемой (основанной на полной информации, доступной на момент $t$) [1].

Зададим вероятностное пространство $(\Omega, F, P)$ и стохастический процесс $\{W(t)\}$, являющийся стандартным Броуновским движением применительно к $\{F_t, t\geq 0\}$. Сигма-алгебра $\{F_t, t\geq 0\}$ представляет собой информацию, доступную в момент $t$, соответственно, любое решение основывается на этой информации.

Инвестиционный портфель содержит безрисковые активы, их средняя стоимость определяется как $\frac{dB(t)}{B(t)}=\rho dt$, средняя стоимость рисковых активов $Z(t)$ определяется в соответствии с геометрическим Броуновским движением $\frac{dZ(t)}{Z(t)}=\mu dt+\sigma dW(t)$, где $\rho,\mu,\sigma$ – положительные константы [3]. $B(0)=b; Z(0)=z$. Таким образом, доходность инвестиций будет равна:

$$dI(t) = IR(t)\cdot\left[1-\delta(t)\right]\cdot\frac{dB(t)}{B(t)} + IR(t)\cdot\delta(t)\cdot\frac{dZ(t)}{Z(t)} =$$

$$= IR(t)\cdot\left[1-\delta(t)\right]\cdot\rho\,dt + IR(t)\cdot\delta(t)\cdot\mu\,dt + IR(t)\cdot\delta(t)\cdot\sigma\,dW(t).$$

Доход страховой компании описывается процессом $dS(t) = dU(t) + dI(t),\ \ S(0) = s$. $S(t)$ зависит от объема инвестиционных активов и выбора инвестиционной стратегии $\delta = \{\delta(t), t \geq 0\}$ [1] .

Страховая компания должна найти стратегию инвестирования $\delta^*$, которая минимизирует вероятность получения отрицательного дохода за бесконечное время [2]: $\delta^* = \min\limits_{\delta}\psi(s)$, где $\psi(s) = P\{S(t) < 0; t \geq 0\}$. Обратной величиной к $\psi(s)$ будет $\gamma(s) = 1 - \psi(s)$, что означает вероятность получения положительного дохода. Тогда можно построить эквивалентную задачу максимизации этой вероятности: $\delta^* = \max\limits_{\delta}\gamma(s)$. Данная задача может быть решена с помощью дифференциального уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Если $\delta^*$ оптимальная стратегия, тогда соответствующая функция вероятности получения положительного дохода максимальна и $\gamma_{\delta^*}(s) \geq \gamma_{\delta}(s)$. Функция $\gamma_{\delta^*}(s)$ – дважды дифференцируема.

Рассматривая отдельный страховой контракт на временном промежутке $[t, t+dt]$ можно выделить две ситуации: страховой случай произошел, тогда доход компании будет равен $s + dI(t) - M^0$, где $M^0$ – страховой случай случайного объема, наступает с вероятностью $FreqC$; или страховой случай не произошел, тогда доход компании будет равен $s + dI(t) + dP(t)$. Для портфеля из множества контрактов это будут соответствующие суммы.

Запишем вероятность получения положительного дохода:

$$\gamma_{\delta}(s) = FreqC\,dt\cdot E\left[\gamma_{\delta}\left(s + dI(t) - M^0\right)\right] + (1 - FreqC)\,dt\cdot E\left[\gamma_{\delta}\left(s + dI(t) + dP(t)\right)\right].$$

Поскольку $\gamma_{\delta^*}(s) \geq \gamma_{\delta}(s)$, то

$$\gamma_{\delta^*}(s) \geq FreqC\,dt\cdot E\left[\gamma_{\delta}\left(s + dI(t) - M^0\right)\right] + (1 - FreqC)\,dt\cdot E\left[\gamma_{\delta}\left(s + dI(t) + dP(t)\right)\right].$$

Перенесем в правую часть:

$$0 \geq E\left[\gamma_{\delta^*}\left(s + dP(t) + dI(t)\right) - \gamma_{\delta^*}(s)\right] + FreqC\,dt\cdot E\left[\gamma_{\delta^*}\left(s + dI(t) - M^0\right)\right] -$$
$$- FreqC\,dt\cdot\gamma_{\delta^*}\left(s + dP(t) + dI(t)\right),$$

$$0 \geq \frac{1}{dt}E\left[d\gamma_{\delta^*}\left(V(t)\right)\right] + FreqC\cdot E\left[\gamma_{\delta^*}\left(s + dI(t) - M^0\right)\right] -$$
$$- FreqC\cdot\gamma_{\delta^*}\left(s + dP(t) + dI(t)\right), \qquad (1)$$

где процесс $V(t) = s + P(t) + I(t)$, означает процесс дохода. Учитывая, что

$$dI(t) = IR(t)\cdot\left[1-\delta(t)\right]\cdot\rho\,dt + IR(t)\cdot\delta(t)\cdot\mu\,dt + IR(t)\cdot\delta(t)\cdot\sigma\,dW(t)$$

и используя формулу Ито замены переменной в стохастическом дифференциальном уравнении, $d\gamma_{\delta^*}(V(t))$ можно записать как

$$d\gamma_{\delta^*}(V(t)) = \frac{1}{2}\sigma^2 IR(t)^2\,\delta(t)^2\,\gamma''_{\delta^*}(V(t))\,dt + \\ +\begin{pmatrix} dP(t) + IR(t)\cdot\left[1-\delta(t)\right]\rho\,dt + IR(t)\cdot\delta(t)\cdot\mu\,dt + \\ +\sigma\cdot IR(t)\cdot\delta(t)\,dW(t) \end{pmatrix}\cdot\gamma'_{\delta^*}(V(t)).$$

Мат. ожидание будет равно:

$$E\left[d\gamma_{\delta^*}(V(t))\right] = \frac{1}{2}\sigma^2 IR(t)^2\,\delta(t)^2\,\gamma''_{\delta^*}(V(t))\,dt + \\ +\begin{pmatrix} dP(t) + IR(t)\cdot\left[1-\delta(t)\right]\rho\,dt + IR(t)\cdot\delta(t)\cdot\mu\,dt + \\ +\sigma\cdot IR(t)\cdot\delta(t)\cdot E\left[dW(t)\right] \end{pmatrix}\cdot\gamma'_{\delta^*}(V(t)).$$

В случайном процессе Броуновского движения $W(t)$ является мартингалом, его математическое ожидание $E\left[dW(t)\right] = 0$. Таким образом:

$$E\left[d\gamma_{\delta^*}(V(t))\right] = \frac{1}{2}\sigma^2 IR(t)^2\,\delta(t)^2\,\gamma''_{\delta^*}(V(t))\,dt + \\ +\begin{pmatrix} dP(t) + IR(t)\cdot\left[1-\delta(t)\right]\rho\,dt + \\ +IR(t)\cdot\delta(t)\cdot\mu\,dt \end{pmatrix}\cdot\gamma'_{\delta^*}(V(t)).$$

Неравенство (1) представим в следующем виде:

$$0 \ge \frac{1}{2}\sigma^2 IR(t)^2\,\delta(t)^2\,\gamma''_{\delta^*}(V(t)) + \left\{P(t) + IR(t)\left[1-\delta(t)\right]\rho + IR(t)\delta(t)\mu\right\}\cdot\gamma'_{\delta^*}(V(t)) + \\ +FreqC\cdot E\left[\gamma_{\delta^*}\left(s + dI(t) - M^0\right)\right] - FreqC\cdot\gamma_{\delta^*}\left(s + dP(t) + dI(t)\right).$$

При $dt \to 0,\ dI(t) \to 0$, имеем:

$$0 \ge \frac{1}{2}\sigma^2\cdot IR(t)^2\cdot\delta(t)^2\cdot\gamma''_{\delta^*}(V(t)) + \begin{pmatrix} P(t) + IR(t)\cdot\left[1-\delta(t)\right]\rho + \\ +IR(t)\cdot b(0)\cdot\mu \end{pmatrix}\cdot\delta'(V(t)) + \\ +FreqC\cdot E\left[\gamma_{\delta^*}\left(s - M^0\right) - \gamma_{\delta^*}(s)\right].$$

Если $\delta$ оптимальна, тогда соответствующая вероятность $\gamma_\delta(s)$ должна быть близка к $\gamma_{\delta^*}(s)$. Запишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$0=\sup_{\delta}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\sigma^2\cdot IR(t)^2\cdot\delta^2\cdot\gamma''_{\delta^*}(s)+\left(P(t)+IR(t)\cdot[1-\delta]\cdot\rho+IR(t)\cdot\delta\cdot\mu\right)\cdot\gamma'_{\delta^*}(s)+\\+FreqC\cdot E\left[\gamma_{\delta^*}\left(s-M^0\right)-\gamma_{\delta^*}(s)\right]\end{array}\right\},$$

где $\gamma_{\delta^*}(s)=0\big|\, s<0, \gamma_{\delta^*}(\infty)=1$. Оптимальная стратегия находится из решения $\left(\gamma_{\delta^*}(s),\delta(s)\right)$ для дохода $s$. Принимая $\delta(s)=\delta$, каждое существующее решение имеет следующие свойства:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\cdot IR(t)^2\cdot\delta^2\cdot\gamma''_{\delta^*}(s)+\left(P(t)+IR(t)\cdot[1-\delta]\cdot\rho+IR(t)\cdot\delta\cdot\mu\right)\cdot\gamma'_{\delta^*}(s)+$$
$$+FreqC\cdot E\left[\gamma_{\delta^*}\left(s-M^0\right)-\gamma_{\delta^*}(s)\right]=0$$

и для арбитражной стратегии $\delta$ имеем:

$$0\geq\frac{1}{2}\sigma^2\cdot IR(t)^2\cdot\delta^2\cdot\gamma''_{\delta}(s)+\left(P(t)+IR(t)\cdot[1-\delta]\cdot\rho+IR(t)\cdot\delta\cdot\mu\right)\cdot\gamma'_{\delta}(s)+$$
$$+FreqC\cdot E\left[\gamma_{\delta}\left(s-M^0\right)-\gamma_{\delta}(s)\right].$$

В случае если доход равен нулю, то оптимальная стратегия $\delta(s)=0$.

$$0=\left(P(t)+IR(t)\rho\right)\cdot\gamma'_{\delta}(0)+FreqC\cdot E\left[\gamma_{\delta}\left(0-M^0\right)-\gamma_{\delta}(0)\right]=$$
$$=\left(P(t)+IR(t)\rho\right)\cdot\gamma'_{\delta}(0)-FreqC\cdot\gamma_{\delta}(0).$$

Отсюда

$$\gamma'_{\delta}(0)=\frac{FreqC\cdot\gamma_{\delta}(0)}{\left(P(t)+IR(t)\rho\right)}.$$

Максимизируя по $\delta$, из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана при условии, что $\sigma^2\cdot IR(t)^2\cdot\delta\cdot\gamma''_{\delta}(s)+\left(-IR(t)\cdot\rho+IR(t)\cdot\mu\right)\cdot\gamma'_{\delta}(s)=0$ получим [2]:

$$\tilde{\delta}=\frac{(\rho-\mu)\cdot\gamma'_{\delta}(s)}{IR(t)\cdot\sigma^2\cdot\gamma''_{\delta}(s)}.$$

Если $\tilde{\delta}\in[0,1]$, тогда оптимальной стратегией будет $\delta^*(s)=\tilde{\delta}$. В случае, если $\tilde{\delta}$ меньше 0, тогда безрисковые активы более привлекательны, чем рисковые. В этом случае $\delta^*(s)=0$. Если $\tilde{\delta}$ больше 1, то наоборот рисковые активы более привлекательны и $\delta^*(s)=1$. Поскольку уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана квадратично по $\delta$, то максимум достигается в точках $\delta=0$, $\delta=\tilde{\delta}$, $\delta=1$.

Библиографический список


1. Панюков, А.В. Инструментальное средство формирования оптимальной стратегии страховой компании / А.В. Панюков, И.А. Тетин // «Совершенствование стратегического управления корпоративными образованиями и региональная промышленная политика перехода к новой инновационной экономике» Пермь: Изд-во ПермГУ. – 2010. – Т. 1. – С. 122–129.
2. Castillo, M. Stochastic Control Theory for Optimal Investment / M. Castillo, G. Parrocha. – http://www.soa.org/library/proceedings/arch/2004/arch04v38n1_17.pdf
3. Lerche, H.R. Boundary crossing of Brownian motion / H.R. Lerche. – Springer-Verlag, 1986.