ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Н.А. Антропова

Хорошо известно классическое представление Альманси для полигармонической функции $Q(x)$

$$Q(x) = H_0(x) + |x|^{2s} H_1(x) + \cdots + |x|^{2s} H_s(x), \tag{1}$$

где $H_k(x)$ – некоторые гармонические функции, которые успешно применяются при построении решений модельных задач для гармонического, бигармонического и полигармонического уравнений [1].

В настоящей работе представления Альманси (1) сначала применяются для построения решения однородной задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения, а затем и для построения решения общей задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре. В [2] с помощью формулы Альманси уже были построены полиномиальные решения уравнения Пуассона $\Delta u(x) = Q(x)$ и полигармонического уравнения $\Delta^m u(x) = Q(x)$, где $Q(x)$ – произвольный полином и они используются в данной работе.

Сначала рассмотрим следующую однородную краевую задачу для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$

$$\Delta^2 u(x) = Q(x), x \in \Omega; \tag{2}$$

$$u_{|\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

с полиномиальной правой частью $Q(x)$ и при $n > 2$.

Теорема 1. *Решение задачи Дирихле (2)–(3) можно записать в виде*

$$u(x) = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha|x|^2)^s (1-\alpha)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!} \Delta^s Q(\alpha x) \alpha^{n/2-1} \, d\alpha. \tag{4}$$

Пример 1. Пусть в задаче Дирихле (2)–(3) $Q(x) = x_i$, а значит $m = 1$. Тогда в сумме из формулы (4) будет только один член при $s = 0$. Получаем

$$u(x) = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 (1-\alpha)\alpha x_i \frac{\alpha^{n/2-1}}{2 \cdot 4} \, d\alpha = x_i \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8(n+2)(n+4)}.$$

Рассмотрим теперь следующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном шаре Ω

$$\Delta^2 \upsilon(x) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{5}$$

$$\upsilon_{|\partial\Omega} = P(x), \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial n}_{|\partial\Omega} = 0 \tag{6}$$

с полиномиальным граничным значением $P(x)$ и при $n > 2$.

Сформулируем утверждение, дополняющее утверждение теоремы 3.

Рассмотрим оператор $\Lambda u = \sum_{k=1}^{n} x_k u_{x_k}$. Он обладает легко проверяемыми свойствами: $\frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} = \Lambda u_{|\partial\Omega}$; если функция u гармоническая в Ω; верны равенства $\Lambda(u\upsilon) = \upsilon\Lambda u + u\Lambda\upsilon$; $\Lambda P_m(x) = mP_m(x)$.

Теорема 2. *Решение задачи (5)–(6) можно записать в виде*

$$\upsilon(x) = P(x) + \frac{1-|x|^2}{2}\Lambda P(x) + \frac{(|x|^2-1)^2}{4}\times$$

$$\times\int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^{s+1}\Big(\Lambda P - \frac{1-\alpha}{2s+4}\Delta P\Big)(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha. \tag{7}$$

Пример 2. Пусть в задаче (5)–(6) $P(x) = x_j^2$. Тогда в сумме из формулы (7) будет только один член $s = 0$. Ясно, что $\Delta x_j^2 = 2$, $\Lambda x_j^2 = 2x_j^2$ и поэтому

$$\upsilon(x) = x_j^2 + (1-|x|^2)x_j^2 + \frac{(|x|^2-1)^2}{4}\int_0^1 \frac{1}{2}\cdot 4\alpha^{n/2-1}\,d\alpha =$$

$$= x_j^2 + (1-|x|^2)x_j^2 + \frac{1}{n}(|x|^2-1)^2 = 2x_j^2 - x_j^2|x|^2 + \frac{|x|^4-2|x|^2+1}{n}.$$

Проверим, что найденная функция $\upsilon(x)$ действительно является решением задачи (5)–(6) с $P(x) = x_j^2$. Воспользуемся простым равенством [2]

$$\Delta(|x|^k\, P_m(x)) = k(2m+k+n-2)|x|^{k-2}\, P_m(x) + |x|^k\, \Delta P_m(x).$$

Тогда легко получить

$$\Delta\upsilon(x) = 4 - 2(n+4)x_j^2 - 2|x|^2 + (4(n+2)|x|^2 - 4n)/n$$

и значит полином $\upsilon(x)$ бигармонический

$$\Delta^2\upsilon(x) = -4(n+4) - 4n + \frac{8n(n+2)}{n} = 0. \tag{8}$$

Кроме этого $\upsilon(x)$ удовлетворяет условиям $\upsilon_{|x|=1} = (x_j^2)_{|x|=1}$ и

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial n}_{|x|=1} = \Lambda\upsilon_{|x|=1} = \Big(4x_j^2 - 4x_j^2|x|^2 + \frac{4|x|^4-4|x|^2}{n}\Big)_{|x|=1} = 0.$$

Значит $\upsilon(x)$ – решение задачи (5)–(6).

Рассмотрим другую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном шаре Ω

$$\Delta^2\upsilon(x)=0, \quad x\in\Omega; \tag{9}$$

$$\upsilon_{|\partial\Omega}=0, \quad \frac{\partial\upsilon}{\partial n}_{|\partial\Omega}=R(x) \tag{10}$$

с полиномиальным граничным значением $R(x)$ и при $n>2$.

Теорема 3. *Решение задачи (9)–(10) можно записать в виде*

$$\upsilon(x)=\frac{|x|^2-1}{2}R(x)-$$

$$-\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^{s+1}R(\alpha x)\alpha^{n/2-1}\,d\alpha. \tag{11}$$

Пример 3. Пусть в задаче (9)–(10) $P(x)=x_k^2$. Тогда в сумме из формулы (11) будет только член $s=0$. Поэтому

$$\upsilon(x)=\frac{|x|^2-1}{2}x_k^2-\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\int_0^1\frac{1}{2}\cdot 2\alpha^{n/2-1}\,d\alpha=\frac{|x|^2-1}{2}x_k^2-\frac{(|x|^2-1)^2}{2n}.$$

Аналогично формуле (8) из примера 2 полином $\upsilon(x)$ бигармонический

$$\Delta^2\upsilon(x)=2(n+4)+2n-8n(n+2)/(2n)=0.$$

Кроме того $\upsilon(x)$ удовлетворяет условиям $\upsilon_{|x|=1}=0$ и

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial n}_{|x|=1}=\Lambda\upsilon_{|x|=1}=\left(2x_k^2|x|^2-x_k^2-\frac{4|x|^4-4|x|^2}{2n}\right)_{|x|=1}=(x_k^2)_{|x|=1}.$$

Объединяя теоремы 1–3, получим следующее общее утверждение.

Теорема 4. *Решение задачи Дирихле*

$$\Delta^2u(x)=Q(x), \quad x\in\Omega; \tag{12}$$

$$u_{|\partial\Omega}=P(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega}=R(x) \tag{13}$$

в единичном шаре Ω с полиномиальными данными $Q(x)$, $P(x)$ и $R(x)$ имеет вид

$$u(x)=P(x)+\frac{|x|^2-1}{2}(R(x)-\Lambda P(x))+\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\times$$

$$\times\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^s\left(\Delta(\Lambda P-R)+\frac{1-\alpha}{2s+4}(Q-\Delta^2P)\right)(\alpha x)\alpha^{n/2-1}\,d\alpha.$$

Библиографический список

1. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А.М. Ильин. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

2. Карачик, В.В. О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения Гельмгольца / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Дифференциальные уравнения. – 2010. – 46:3. – С. 384–95.