ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ МНОГООБРАЗИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ШАРОВЫХ РАЗБИЕНИЙ. ОРИЕНТАЦИЯ ШАРОВЫХ КОМПЛЕКСОВ

С.И. Бельков

В предыдущих работах [1, 2] были рассмотрены симплициальные разбиения многообразий и доказана их независимость от симплициального разбиения многообразия. На практике же симплициальные комплексы оказались не вполне удобными для изучения многообразий, т.к. триангуляция даже на примере простых и хорошо изученных многообразий приводила к большому объему вычислений из-за большого количества элементов в триангуляции. Поэтому было решено для изучения инвариантов перейти от симплициальных комплексов к шаровым.

Определение. Топологический шаровой комплекс S есть покрытие хаусдорфова пространства X конечным набором клеток – замкнутых топологических шаров такое, что:

1) относительные внутренности шаров из S образуют разбиение X;
2) граница каждого шара из S составлена из шаров меньшей размерности.

Кусочно-линейный шаровой комплекс есть конечное покрытие евклидова полиэдра X кусочно-линейными шарами, для которого выполнены условия 1 и 2. В дальнейшем будут рассматриваться именно такие комплексы.

Вычисления будем производить в системе компьютерной алгебры GAP.

В случае шарового комплекса (как и в случае симплициальных комплексов, описанных в работах [1, 2]) тоже строится алгебраический комплекс, в который координаты вершин входят как параметры. Для его построения нам прежде всего потребуется умение задавать и ориентировать шаровые комплексы, а затем уже мы будем описывать линейные пространства и их отображения друг в друга, из которых состоит алгебраический комплекс.

Шаровой комплекс будем описывать индукцией по размерности шаров следующим образом:

- пронумеруем все вершины комплекса – то означает, что задан 0-остов описываемого комплекса;
- считаем, что k-остов уже описан (т.е. занумерованы все k-клетки);

• описываем *(k+1)*-остов, описывая каждую *(k+1)*-клетку в виде множества, состоящего из номеров *k*-клеток, входящих в ее границу. Все *(k+1)*-клетки записываются в виде списка, в котором каждая из них так же имеет свой номер.

Например, трехмерная сфера S^3 может задается в наших обозначениях следующим комплексом с двумя вершинами:

[
[[1, 2], [1, 2]]
[[1, 2], [1, 2]]
[[1, 2], [1, 2]]
]

Помимо задания элементов комплекса, нужно еще задать их ориентацию, а также научиться отвечать на вопрос об ориентируемости всего многообразия. Ориентация *(k+1)*-клетки представляет собой перечисление ориентаций всех *k*-клеток, входящих в ее границу (то есть указание того как именно ориентирована – положительно или отрицательно – каждая из *k*-клеток на границе). Ориентацию клеток будем производить по индукции:

1) все 1-клетки (т.е. отрезки) ориентируются так, что вершина отрезка с меньшим номером имеет отрицательную ориентацию (-1), а вершина с большим номером – положительную $(+1)$.

2) ориентация *k*-клетки при $k \geq 2$ – это согласованная ориентация $(k-1)$-мерных клеток на ее границе. Если на границе клетки a лежат шары *b* и *c* (в клетку a они входят с ориентациями $\varepsilon_b^{(a)}$ и $\varepsilon_c^{(a)}$ соответственно) и их границы содержат общую $(k-2)$-клетку $d \subset (\partial b \cap \partial c)$, ориентация которой равна $\varepsilon_d^{(b)}$ и $\varepsilon_d^{(c)}$ в шарах *b* и *c* соответственно, то условие согласования выглядит следующим образом:

$$\varepsilon_d^{(b)}\varepsilon_b^{(a)} = -\varepsilon_d^{(c)}\varepsilon_c^{(a)}.$$

Для приведенного примера трехмерной сферы S^3 список, задающий ее ориентацию, может выглядеть, например, следующим образом:

[
[[−1, +1], [−1, +1]]
[[−1, +1], [−1, +1]]
[[−1, +1], [−1, +1]]
]

Алгоритм задания ориентации шарового разбиения включает в себя следующие шаги:

1) так как одномерные грани заданы в GAP в виде списка, то номера вершин в каждой паре упорядочены по возрастанию и каждая одномерная грань ориентируется как $[-1, \quad +1]$;

2) затем ведется индукция по размерности. Для задания ориентации одного k-мерного шара:

a) сначала мы произвольным образом задаем ориентацию первого $(k-1)$-мерного элемента в списке, задающем ориентируемый шар, например, взяв ее положительной $(+1)$.

b) затем строится граф, вершины которого i соответствуют $(k-1)$-мерным шарам B_i^k, а каждое ребро (i,j), связывающее две вершины, – $(k-2)$-мерной грани $B_l^{(k-1)} \subset \left(B_i^k \cap B_j^k\right)$, лежащей на пересечении границ $(k-1)$-мерных шаров.

c) после этого в графе ищется остовное дерево с корнем в вершине, соответствующей $(k-1)$-мерному элементу из пункта a).

d) теперь производится обход полученного остова, каждый раз осуществляя переход по ребру (i,j) из вершины i с уже определенной ориентацией соответствующего ей шара. При этом для определения ориентации шара B_j^k используется условие согласованности. В результате прохождения всех вершин дерева получается ориентация выбранной k-мерной клетки.

Алгоритм продолжается для всех $k \le n$, где n – размерность многообразия (максимальная размерность элементов шарового комплекса). При этом всегда получается согласованная ориентация.

Похожие действия можно проделать и для $k = n+1$, чтобы сделать вывод об ориентируемости многообразия. Проверим, возможно ли задать согласованную ориентацию всех n-мерных шаров (в виде списка). Для этого:

- положим ориентацию первого n-мерного шара равной $(+1)$;
- вновь строим граф, в котором вершины соответствуют n-мерным клеткам, а ребра – $(n-1)$-мерным;
- при помощи остовного дерева обходим все вершины, задавая ориентации всех n-мерных шаров;
- теперь проверяем согласованность заданной ориентации на всех $(n-1)$-мерных шарах, соответствующих хордам построенного графа.

Если многообразие ориентируемо, то мы как раз построили согласованную ориентацию. Если же проверка согласованности дает отрицательный ответ, то изучаемое многообразие неориентируемо.

В перспективе планируется разработка пакета для GAP, предназначенного для изучения многообразий и построения различных их инвариантов. Описанная программа для построения ориентации шарового разбиения многообразия является необходимой частью этого пакета, т.к. знание ориентации необходимо для построения инвариантов с использованием антикоммутирующих переменных и применения аналогов уравнения пентагона [3].

Библиографический список

1. Бельков, С.И. Матричное решение уравнения пентагона с антикоммутирующими переменными / С.И. Бельков, И.Г. Корепанов // ТМФ. – 2010. –163:3. – С. 513–528.

2. Bel'kov, S.I. A simple topological quantum field theory for manifolds with triangulated boundary / S.I. Bel'kov, I.G. Korepanov, E.V. Martyushev. – http://arxiv.org/abs/0907.3787.

3. Бельков, С.И. Матричное решение уравнения пентагона с антикоммутирующими переменными и связанные с ним инварианты / С.И. Бельков // Научный поиск: материалы второй научной конференции аспирантов и докторантов. Естественные науки. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – С. 15–18.