УДК 531

УЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ В РАСЧЕТАХ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДЕФОРМАЦИИ

О.С. Садаков, А.О. Щербакова

На примере одноосного напряженного состояния показано разделение деформации на обратимую и необратимую составляющие. Необратимая деформация определяется пластическим удлинением, накопленным за историю деформирования, а обратимая - термоупругая - в общем случае не разделяется на упругую и тепловую. Для иллюстрации приведены два примера переменного термомеханического нагружения стержня.

Ключевые слова: геометрическая нелинейность, упругая деформация, тепловая деформация, пластическая деформация, термомеханическое погружение.

Введение

Существующие методы оценки прочности конструкций в подавляющем большинстве основаны на гипотезе бесконечной малости перемещений, что существенно упрощает расчеты. Однако во многих случаях учет нелинейности может не только количественно, но и качественно изменить результат. Развитие геометрически нелинейных подходов сдерживается недостаточной пока ясностью их теоретических основ, начиная с базовых понятий о мерах напряженного и деформированного состояний [1, 2]. Определенную помощь в этом смысле может оказать анализ поведения простейших конструкций. Ниже с этой целью рассмотрен случай одноосного напряженного состояния на примере деформирования однородного неупругого стержня под действием нормальной силы и температуры.

Дисторсия

В расчетах на прочность материал конструкции моделируется в виде сплошной однородной среды. При этом делается допущение о том, что гладкие материальные волокна и пленки при деформировании остаются гладкими. Отсюда следует дифференцируемость полей смещений *u(x)* (*x* - радиус-вектор материальной точки в недеформированном состоянии). В любой точке такой среды существует градиент смещений $\boldsymbol{u}\nabla\equiv\boldsymbol{D}$, связывающий начальное положение элементарного материального волокна dx с его изменением du:

$$d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{x}. \qquad (1)$$

Здесь точкой обозначено скалярное произведение ближайших к ней векторов (тензор дисторсии D представляет сумму диад). Элементарное материальное волокно dx (рис. 1) в результате деформирования и (или) поворота окрестности точки χ преобразуется в волокно dr, где r - радиус-вектор материальной точки в текущий момент времени, r = x + u:

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{F}\equiv\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}, \qquad (2)$$

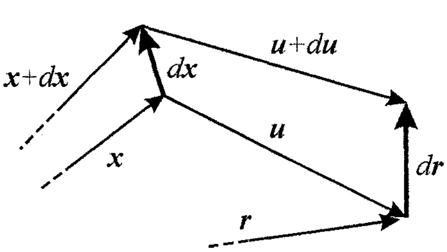

Рис. 1. Элементарное волокно до и после деформации

I— тензор тождественного преобразования. Таким образом, бесконечное множество элементарных волокон dx в окрестности точки x смещается на величину $u(x)$ и преобразуется в упорядоченное множество dr, определяемое двухвалентным тензором F, характеризуемым всего девятью числами (координатами). Тензор F часто неоправданно называют градиентом деформаций[1]. Более корректно называть его дисторсией, так как он определяет и деформацию элемента объема тела, и его поворот.

Если дисторсия вызывается разными причинами - например, тепловым воздействием (соответствующую дисторсию обозначим F_T) и упругими деформациями, связанными с напряжениями

[1] Градиент деформации - трехвалентный тензор, характеризуемый 27 координатами.

(дисторсия F_e), - то результирующее преобразование $dx \to dr$ определяется произведением этих линейных преобразований

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_e \cdot \boldsymbol{F}_T \qquad (3)$$

(результат ряда линейных операций определяется произведением операторов). Приведенное выражение означает, что элемент объема был сначала нагрет (охлажден), а потом дополнительно деформирован приложенными напряжениями, характеризующимися тензором σ (тензор напряжений Коши в деформированной среде).

Названные дисторсии обычно бывают достаточно близки к единичному тензору I. Поэтому для удобства вводят тензоры $\boldsymbol{D}_e = \boldsymbol{F}_e - \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{D}_T = \boldsymbol{F}_T - \boldsymbol{I}$ (также называемые дисторсиями) и *с некоторой погрешностью* произведение (3) заменяют суммой

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_e + \boldsymbol{D}_T. \qquad (4)$$

Здесь порядок воздействия (тепловое воздействие - силовое или наоборот) безразличен. Симметричные части дисторсии (4) называют деформациями $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_T$ (та же аддитивность).

Эти довольно стандартные для прочностных расчетов выражения основываются на гипотезе о бесконечной малости составляющих дисторсии. Например, если компоненты тензора дисторсии имеют порядок одного процента, то ошибка от замены строгого выражения (3), из которого следует, что

$$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{D}_e + \boldsymbol{I}) \cdot (\boldsymbol{D}_T + \boldsymbol{I}) - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{D}_e + \boldsymbol{D}_T + \boldsymbol{D}_e \cdot \boldsymbol{D}_T$$

суммой (4) имеет порядок 2 %.

Одноосное напряженное состояние

Переходя к более корректному (нелинейному) подходу, рассмотрим следующий простейший случай: среда изотропна, напряженное состояние одноосно. Пусть, например, это будет однородный стержень длиной l_0, нагружаемый продольной силой N. Текущее значение площади поперечного сечения стержня равно S; ось стержня определяется ортом i; нормальное напряжение σ *в* стержне равно отношению N/S (тензор напряжений равен σ_{ii}).

Деформированное состояние продольно растягиваемого стержня, очевидно, является трехосным, но нас будет интересовать только осевая составляющая деформации $\varepsilon = \Delta l/l_0$ (Δl - приращение длины стержня). Коэффициент длины стержня κ представляет отношение l/l_0, где l - текущая длина стержня; отсюда $\kappa = 1 + \varepsilon$.

Составляющие деформации

Ограничим круг составляющих рассматриваемой деформации стержня тремя ее основными видами: тепловой, упругой и неупругой.

Неупругая деформация $\varepsilon_p = \Delta l_p/l_0$ (Δl_p - неупругое удлинение стержня) связана со сдвигами, в результате которых происходят разрывы связей между частицами среды и устанавливаются новые - с другими соседними частицами. Это определяет необратимость неупругой деформации. Соответствующий коэффициент длины стержня равен

$$k_p = (l_0 + \Delta l_p)/l_0 = 1 + \varepsilon_p. \qquad (5)$$

Тепловая деформация, в отличие от деформации ε_p, обратима; она связана с изменением интенсивности теплового движения частиц среды. С ростом температуры происходит увеличение среднестатистического расстояния между частицами среды. При нагреве свободного стержня (изменение температуры обозначим T) его длина возрастает на величину Δl_T; соответствующий коэффициент длины зависит от текущего значения T:

$$k_T = (l_0 + \Delta l_T)/l_0 = 1 + \varepsilon_T, \qquad \varepsilon_T = f(T). \qquad (6)$$

Тепловая деформация *свободного* стержня $f(T) = \Delta l_T/l_0$ представляет механическую характеристику конкретного материала. При возврате к начальной температуре она становится равной нулю.

При *упругом* растяжении *свободного* стержня он вытягивается на величину $\Delta l_e = g(\sigma) l_0$; соответственно

$$k_e = (l_0 + \Delta l_e)/l_0 = 1 + \varepsilon, \qquad \varepsilon_e = g(\sigma); \qquad (7)$$

величина $\varepsilon_e = \Delta l_e/l_0 = g(\sigma)$ - механическая характеристика материала. Напряжение, как и температура, приводит к изменению среднестатистического расстояния между частицами; при этом в межатомных связях запасается потенциальная энергия, которая затем при разгрузке полностью возвращается нагружающему устройству. Упругая деформация, как и тепловая, обратима и зависит лишь от мгновенного значения напряжения.

Упругопластическое деформирование

Названные три типа деформации практически не встречаются по отдельности, но вопрос об их вкладе в общую деформацию ε (или $\kappa = \varepsilon + 1$) оказывается нетривиальным.

Упругопластическое деформирование вполне типично: необратимые сдвиги, приводящие к пластическому удлинению стержня, вызываются напряжениями, то есть сопровождаются упругими деформациями. Необратимость пластической деформации и обратимость упругой позволяют в любой стадии упругопластического деформирования мысленно произвести разгрузку. Упругие деформации при этом исчезают, а пластическая *вытяжка* стержня остается. Логично считать поэтому, что пластическая деформация ε_p в любой момент истории нагружения определяется необратимым удлинением Δl_p, отнесенным к *начальной* длине l_0; $k_p = 1 + \varepsilon_p$ - пластический коэффициент длины; выражение (5) относится не только к остаточному, но и к нагруженному состоянию.

Возвращаясь постепенно к состоянию до начала разгрузки (восстанавливая напряжение, гипотетически положительное), заметим, что стержень длиной $l_0 + \Delta l_p$ все сильнее упруго вытягивается под действием возрастающего напряжения. При этом, очевидно, чем больше предварительная пластическая вытяжка Δl_p, *тем* сильнее изменится длина стержня при приложении нагрузки (мы здесь полагаем, что пластическое удлинение не влияет на упругие свойства стержня, определяемые функцией $g(\sigma)$ (7)). Отсюда следует, в частности, что упругое удлинение пластически вытянутого стержня определяется выражением

$$\Delta l_{e(p)} = g(\sigma)(l_0+\Delta l_p). \tag{8}$$

Соответственно, коэффициент длины оказывается равным

$$k = k_{ep} = (l_0+\Delta l_p+\Delta l_{e(p)})/l_0 = k_e k_p; \qquad l = k_{ep} l_0. \tag{9}$$

Здесь $k_e = 1 + g(\sigma)$ – зависит только от σ, как и при упругой работе.

Термоупругая деформация

Тепловая деформация (6), как и упругая (7), обратима. Если функция $g(\sigma)$ не меняется при нагреве, а функция $f(T)$ не зависит от нагрузки, то при упругом деформировании нагретого стержня происходит упругая вытяжка стержня длиной $k_T l_0$. Результирующий коэффициент длины

$$k = l/l_0 = k_e k_T = (1+g(\sigma))(1+f(T)) = 1 + g(\sigma) + f(T) + g(\sigma) f(T). \tag{10}$$

То же выражение справедливо и при нагреве растянутого стержня. Однако реальная ситуация более сложна: с изменением температуры свойства упругости, очевидно, изменяются. Не исключено и влияние напряжения на коэффициент теплового расширения. Поэтому выражение (10) следует заменить, введя общий коэффициент длины k_{eT}, характеризующий обратимую деформацию, обобщенно определяющую влияние текущих значений напряжения и температуры

$$k_{eT} = 1 + \varphi(\sigma, T). \tag{11}$$

Обратимая деформация (будем называть ее термоупругой) представляет собой функцию двух аргументов $\varepsilon_{eT} = \varphi(\sigma, T) = \Delta l_{eT}/l_0$, где Δl_{eT} - удлинение стержня в результате воздействия температуры и напряжения. Полагаем, что разделить ее на составляющие ε_e и ε_T в общем случае не удастся.

Термоупругопластическая деформация

В общем случае деформация представляет сочетание термоупругой и неупругой деформаций; первая обратима, последняя нет. При наличии пластической деформации наложение термоупругой ведет к термоупругому деформированию, в котором начальная длина l_0 должна быть заменена на $k_p l_0$. Напомним, что коэффициент k_p определяется пластическим удлинением Δl_p, отнесенным к *начальной* длине стержня, независимо от текущей длины (возможно, заметно отличающейся от начальной), зависящей от текущих значений σ *и* T.

Экспериментальное определение функции φ

Каждый материал характеризуется своей функцией $\varphi(\sigma, T)$ (рис. 2); она может быть найдена из соответствующих испытаний.

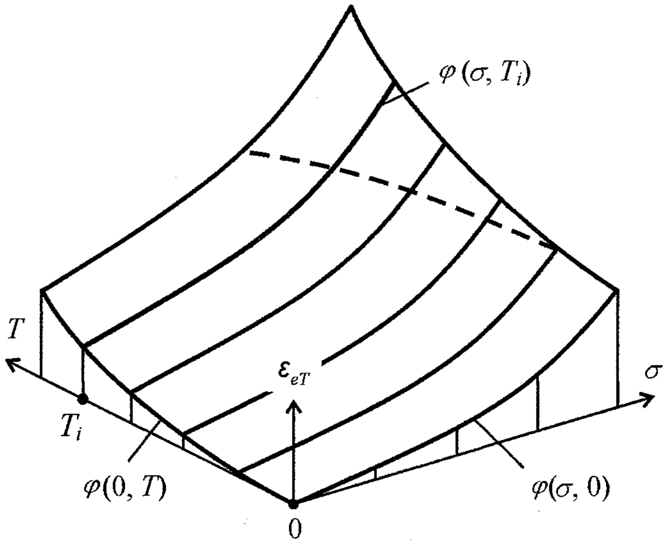

Рис. 2. Часть функции φ (при $\sigma > 0$, $T > 0$). Выделены изотермы $\varphi(\sigma, T_i)$

Проще всего найти вначале функцию $\varphi(0, T)$, замеряя деформацию нагреваемого стержня. Часто она описывается квадратной параболой

$$\varphi(0, T) = \alpha T + \beta T^2. \qquad (12)$$

Вторым слагаемым в этом выражении часто пренебрегают.

Далее необходимы, очевидно, испытания при ненулевых напряжениях, хотя это потребует более сложной экспериментальной процедуры.

Пока напряжения малы, нагретые образцы при ряде значений температуры $T = T_i$ =const следует растягивать или сжимать, получая при этом изотермы $\varphi(\sigma, T_i)=\Delta l(\sigma, T_i)/l_0$. Напомним, что l_0 – длина образца до нагрева и до приложения нагрузки. При разгрузке длина должна возвращаться к размеру $l = (1+\varphi(0, T_i))l_0$. В частности, может выполняться закон Гука:

$$\varphi(\sigma, T) = \varphi(0, T) + \sigma/E(T), \qquad (13)$$

тогда поверхность $\varphi(\sigma, T)$ линейчата.

Остаточная деформация

Выявляя характеристику материала $\varphi(\sigma,T)$, необходимо делать разгрузки, чтобы удостовериться в обратимости деформации, позволяющей использовать выражение

$$\varphi(\sigma^*, T_i) = (l(\sigma^*, T_i) - l(0, T_i))/l(0, T_i).$$

Здесь σ^* – значение напряжения в момент начала разгрузки, T_i – значение температуры в опыте. С ростом температуры и напряжения (при выходе за некоторую условную границу, показанную на рис. 2 штриховой линией) при разгрузке начнет появляться заметная остаточная деформация (рис. 3): длина образца не возвращается к значению $(1+\varphi(0,T_i))l(0,T_i)$. Это означает, что в процессе нагружения и разгрузки произошло неупругое (пластическое и/или вязкое) деформирование. Если допустить, что в процессе *разгрузки* неупругая деформация не изменилась, то из удлинения $\Delta l(\sigma^*,T_i)$, отвечающего максимальному напряжению σ^*, следует вычесть остаточное. Полученное удлинение позволяет найти значение термоупругой деформации в зоне неупругих деформаций:

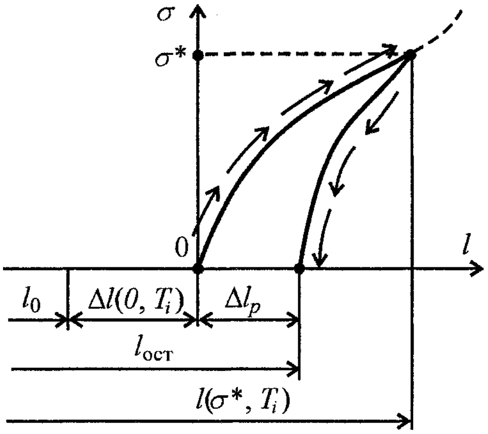

Рис. 3. Остаточное удлинение

$$\varphi(\sigma^*,T_i) = (l(\sigma^*,T_i) - \Delta l_p)/l_0. \qquad (14)$$

Если нет уверенности в упругости разгрузки (например, если материал обладает заметной вязкостью), то необходимо выявить реологические свойства среды, вводя и проверяя соответствующие модели пластичности и ползучести. Добавим, что этот – существенно более сложный – этап исследования в любом случае необходим для проведения прочностных расчетов конструкций.

Примеры расчета

Для иллюстрации приведем два простых примера расчета эволюции коэффициентов длины неупругого стержня при заданной истории нагружения. Первый пример относится к гипотетическому случаю идеально пластического материала (известны модуль Юнга E и предел текучести σ_T). Задается история изменения температуры и коэффициента длины (табл. 1). Функция φ принята в виде $\varphi(\sigma, T) = \alpha T + \sigma/E$. В первом столбце таблицы указан номер этапа.

Таблица 1

№	*Температура*	*Напряжение*	*Коэффициент длины*
1	0	σ_T	$1+\sigma_T/E$
2	T	σ_T	$1+\sigma_T/E+\alpha T$
3	T	σ_T	$1+\sigma_T/E+\alpha T+\Delta k_3$
4	0	σ_T	$1+\sigma_T/E+\Delta k_3$
5	0	0	$1+\Delta k_3$

На первом этапе стержень растянут до достижения напряжением значения σ_T. Затем при постоянном напряжении производится нагрев: стержень удлиняется (или укорачивается, если $T< 0$). На третьем этапе производится вытяжка на величину Δk_3. Величина Δk_3 представляет относительное пластическое удлинение $p = \Delta l_p/l_0$. Затем следует возврат к начальной температуре и, наконец, снятие нагрузки.

В другом примере (табл. 2) рассмотрен стержень из материала с линейным упрочнением (модель Ишлинского-Прагера). В этом случае может быть задана история изменения напряжения (и температуры). Вид диаграммы *неупругого* деформирования при изотермическом нагружении, разгрузке и нагружении обратного знака показан на рис. 4.

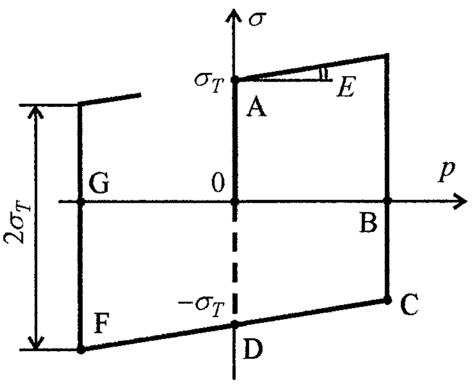

Рис. 4. Модель Ишлинского–Прагера

Таблица 2

№ п.п.	Напряжение	Температура	Коэффициент длины
1	0	T_1	$1+\alpha T_1$
2	σ_T	T_1	$1+\alpha T_1+\sigma_T/E$ (точка А на рис. 4)
3	$\sigma_T+\Delta\sigma$	T_1	$(1+\alpha T_1+(\sigma_T+\Delta\sigma)/E)(1+\Delta\sigma/E)$
4	$\sigma_T+\Delta\sigma$	0	$(1+(\sigma_T+\Delta\sigma)/E)(1+\Delta\sigma/E)$
5	0	0	$1+\Delta\sigma/E'$ (точка В)
6	$\Delta\sigma-\sigma_T$	0	$(1+(\sigma_T-\Delta\sigma)/E)(1+\Delta\sigma/E)$ (точка С)
7	$-\sigma_T$	0	$1-\sigma_T/E$ (точка D)
8	$-\sigma_T-\Delta'\sigma$	0	$(1-(\sigma_T+\Delta'\sigma)/E)(1-\Delta'\sigma/E)$ (точка F)
9	0	T_2	$(1+\alpha T_2)(1-\Delta'\sigma/E)$ (точка G)
10	σ_T	T_2	$1+\alpha T_2+\sigma_T/E$ (точка А)

Тензор дисторсии

В общем случае для описания напряженно-деформированного состояния элементов конструкций используется, очевидно, тензорный аппарат. Напряжения в *деформированной* среде описываются тензором напряжений Коши; другие тензоры напряжений, фигурирующие в соответствующей литературе, имеют весьма туманные обоснования. Для описания деформированного состояния, обобщая предложенную в статье идеологию, можно использовать тензор дисторсии F в виде произведения трех сомножителей

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{V}_{eT} \cdot \boldsymbol{V}_p, \tag{15}$$

где V_p - симметричный тензор коэффициентов длины, связанный с неупругими деформациями; произведение трех его главных значений равно единице - ввиду требования пластической несжимаемости. Тензор V_{eT} - симметричный тензор термоупругих коэффициентов длины, однозначно зависящих от мгновенных значений тензора напряжений и температуры. Произведение симметричных тензоров не обязательно симметрично, и произведение $V_{eT} \cdot V_p$, если их главные оси не совпадают, представляет произведение некоторого ортогонального тензора жесткого поворота и симметричного тензора коэффициентов длины. Кроме того, в деформируемой конструкции могут возникать дополнительные повороты, связанные с движениями остальных элементов объема среды и зависящие от граничных условий. Поэтому в выражении (15) фигурирует еще один ортогональный тензор R возможного дополнительного поворота. Он находится в процессе решения краевой (и начальной) задачи о деформировании конструкции.

Заключение

Приведенный анализ термоупругопластического (или термовязкоупругопластического) деформирования простейшей конструкции (например, фермы) позволил обосновать структуру коэффициента длины в геометрически нелинейном подходе, а также предложить обобщение полученных результатов на произвольное напряженно-деформированное состояние. Последнее, по-видимому, потребует дальнейшего более детального расчетного обоснования.

Литература

1. Lee, E.H. Finite strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis / E.H. Lee, D.T. Liu // J. Appl. Phys. - № 38. - C 19-27.

2. Stumpf, H. Constitutive model and incremental shakedown analysis in finite elastoplasticity / H. Stumpf// Inelastic behavior of structures under variable loads. - 1995. - C 293-307.

3. Садаков, О.С. К расчетам напряженно-деформированного состояния конструкций в геометрически нелинейной постановке / О.С. Садаков // Труды Международной конференции «Снежинск и наука - 2003. Современные проблемы атомной науки и техники». - Снежинск: СГФТА. - 2003. - С. 73-74.

4. Садаков, О.С. О корректности решения геометрически нелинейных задач пакетом МКЭ / О.С. Садаков, А.А. Шапиро // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». - 2003. - Вып. 4. - № 8(24). - С. 72-77.

5. Буслаева, О.С. Концепция лабораторной системы отсчета в геометрически и физически нелинейных задачах / О.С. Буслаева, О.С. Садаков, А.А. Шапиро // Математическое моделирование и краевые задачи: труды Всероссийской научной конференции 26-28 мая 2004 года. Самарский государственный технический университет. - 2004. - Ч. 1. - С. 46—48.

Поступила в редакцию 11 февраля 2010 г.

CONSIDERING THE GEOMETRYCAL NONLINEARITY IN CALCULATION OF INELASTIC DEFORMATION OF STRUCTURES. DECOMPOSITION OF STRAINS

The article shows splitting of a deformation on a reversible and an irreversible component when considering the uniaxial stress state. The irreversible deformation is defined by a plastic lengthening which has been accumulated during the whole history of the deformation. The reversible (thermoelastic) deformation cannot be divided into an elastic deformation and a thermal one. Two examples of variable thermomechanical loading of a rod are shown.

Keywords: geometrical nonlinearity, elastic deformation, thermal deformation, plastic deformation, thermomechanical loading.

Sadakov Oleg Sergeevich is Professor, Dr. Sc. (Engineering), Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, Physics Faculty, South Ural State University.

Садаков Олег Сергеевич - профессор, доктор технических наук, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, физический факультет, Южно-Уральский государственный университет.

Scherbakova Alia Olegovna is Cand.Sc. (Engineering), Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Department, Physics Faculty, South Ural State University.

Щербакова Алла Олеговна - кандидат технических наук, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, физический факультет, Южно-Уральский государственный университет.

e-mail: AllaScherbakova@list.ru