

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ О СТЕРЖЕНЬ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЙ С ЖЕСТКОЙ ПРЕГРАДОЙ

А.А. Битюрин

Осуществляется математическое моделирование продольного упругого центрального удара однородного стержня меньшего поперечного сечения по однородному стержню, взаимодействующему с жесткой преградой, при не-удерживающих связях в контактном и ударном сечениях. Моделируется величина критической предударной скорости, приводящей к потере устойчивости рассматриваемой стержневой системы.

Ключевые слова: продольный удар, устойчивость, деформация, математическое моделирование, скорость, жесткая преграда, стержень.

Введение

Выполнение многих технологических операций в машиностроении, металлургии, горном деле, строительстве, производстве строительных материалов и прочих многочисленных отраслях связано с ударной обработкой и разрушением различных материалов. Машины как средства, основанные на применении удара, используются для выполнения работ, связанных с возбуждением в обрабатываемом материале значительных по величине усилий, приводящих к разрушению материала или его деформированию (например, машины для штамповки деталей,ковки, разрушения горных пород, бетонных покрытий, погружения свай и т.д.). Эффективность применения таких машин во многом обусловлена тем, что разрушение материала или его деформирование во многих технологических процессах определяется уровнем возникающих напряжений, а не продолжительностью их воздействия. В основе технологических операций с использованием машин ударного действия лежит нанесение продольного удара неоднородного упругого стержня или системы стержней.

Впервые задача о динамической устойчивости упругих стержней при мгновенном продольном действии сжимающей нагрузки, которая в дальнейшем сохраняет своё постоянное значение, была решена М.А. Лаврентьевым и А.Ю. Ишлинским в работе [7]. Позднее проводилось теоретическое исследование потери устойчивости мгновенно сжатого бесконечного упругого стержня методом малых возмущений [11], а также исследование потери устойчивости полубесконечного упругого стержня [5, 8]. В работах [9, 10] Малым В.И. предложен подход для исследования потери устойчивости стержней при больших и малых прогибах на основе асимптотического метода линеаризации на неустановившейся стадии выпучивания при ударе полубесконечного упругого стержня телом большой массы, движущимся с постоянной скоростью.

Выполнение поставленных задач сводилось либо к аналитическому, либо к численному решению линеаризованного дифференциального уравнения четвёртого порядка, а также системы дифференциальных уравнений движения стержня с начальной прогибью. Недостатком такого подхода является очевидная трудность математического решения, сопряженная с громоздкими математическими выкладками, а также удовлетворительная сходимость результатов математического моделирования и экспериментальных данных лишь в узком интервале изменения той или иной характеристики, связанная с накоплением погрешности вычислений в ходе проведения математических операций. Задача о потере устойчивости неоднородных ступенчатых стержней при ударе в перечисленных работах, а также в работах [2, 5, 12, 14] не рассматривалась.

Постановка задачи

Рассматривается математическая модель продольного упругого центрального удара однородного стержня меньшего поперечного сечения, движущегося со скоростью V_0 , по однородно-

му стержню, взаимодействующему с жесткой преградой. Масса первого стержня m_1 , длина l_1 , масса и длина второго соответственно m_2 и l_2 , общая длина обоих стержней $l=l_1+l_2$ (рис. 1). Оба стержня состоят из одного материала.

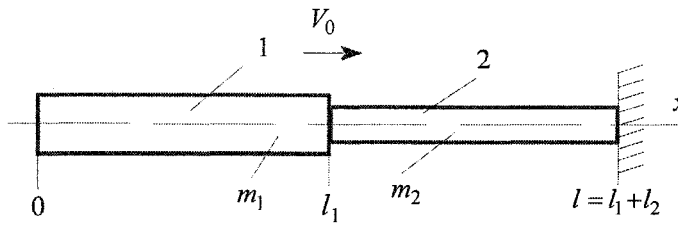


Рис. 1. Схема удара однородных стержней при неудерживающих связях

Движение поперечных сечений соударяемых стержней описывается волновыми уравнениями:

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad l_1 \leq x \leq l, \quad (2)$$

где $u_1(x,t), u_2(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения стержней 1 и 2, x – координата сечения, t – время, a – скорость распространения продольной волны деформации.

Начальные условия определяют состояние стержней перед их соударением:

$$\text{при } t = t_0 = 0 \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Краевые условия определяют отсутствие силы в сечении $x = 0$ и равенство нулю скорости сечения $x = l$ при взаимодействии стержня 2 с жесткой преградой:

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

а также определяют равенство сил и условия сопряжения стержней в сечениях $x = l_1$ при непосредственном их взаимодействии:

$$EA_1 \frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} = EA_2 \frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial x}, \quad \text{если } \frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} < 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial t}, \quad \text{если } \frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} < 0, \quad (6)$$

либо отсутствие сил в ударных сечениях стержней, если их взаимодействие отсутствует:

$$\frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если } u_1(l_1,t) - u_2(l_1,t) \leq 0, \quad (7)$$

где E – модуль упругости первого рода, A_1 и A_2 – площади поперечных сечений соответственно первого и второго стержней, a – скорость распространения продольной волны деформации.

Метод решения

Решение дифференциальных уравнений (1), (2) реализуется методом Даламбера в виде [1]:

$$u_1(x,t) = f_1(at - x) + \varphi_1(at + x), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (8)$$

$$u_2(x,t) = f_2(at - x) + \varphi_2(at + x), \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2, \quad (9)$$

$$\varepsilon_1(x,t) = \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} = -f_1'(at - x) + \varphi_1'(at + x), \quad (10)$$

$$v_1(x,t) = \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = a[f'_1(at-x) + \varphi'_1(at+x)], \quad (11)$$

$$\varepsilon_2(x,t) = \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} = -f'_2(at-x) + \varphi'_2(at+x), \quad (12)$$

$$v_2(x,t) = \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = a[f'_2(at-x) + \varphi'_2(at+x)]. \quad (13)$$

Перейдем к относительным величинам, характеризующим прямые и обратные волны $\tilde{f}'(at-x) = f'(at-x)/\frac{V_0}{a}$; $\tilde{\varphi}'(at+x) = \varphi'(at+x)/\frac{V_0}{a}$, деформацию в сечении и его скорость $\tilde{\varepsilon}(x,t) = -\tilde{f}'(at-x) + \tilde{\varphi}'(at+x)$, $\tilde{v}(x,t) = \frac{v(x,t)}{V_0} = \tilde{f}'(at-x) + \tilde{\varphi}'(at+x)$.

Пример 1

Пусть в момент времени $T = t_i$ построена диаграмма относительной продольной деформации $\tilde{\varepsilon}$ для первого однородного участка произвольной многоступенчатой стержневой системы при продольном ударе (рис. 2, а).

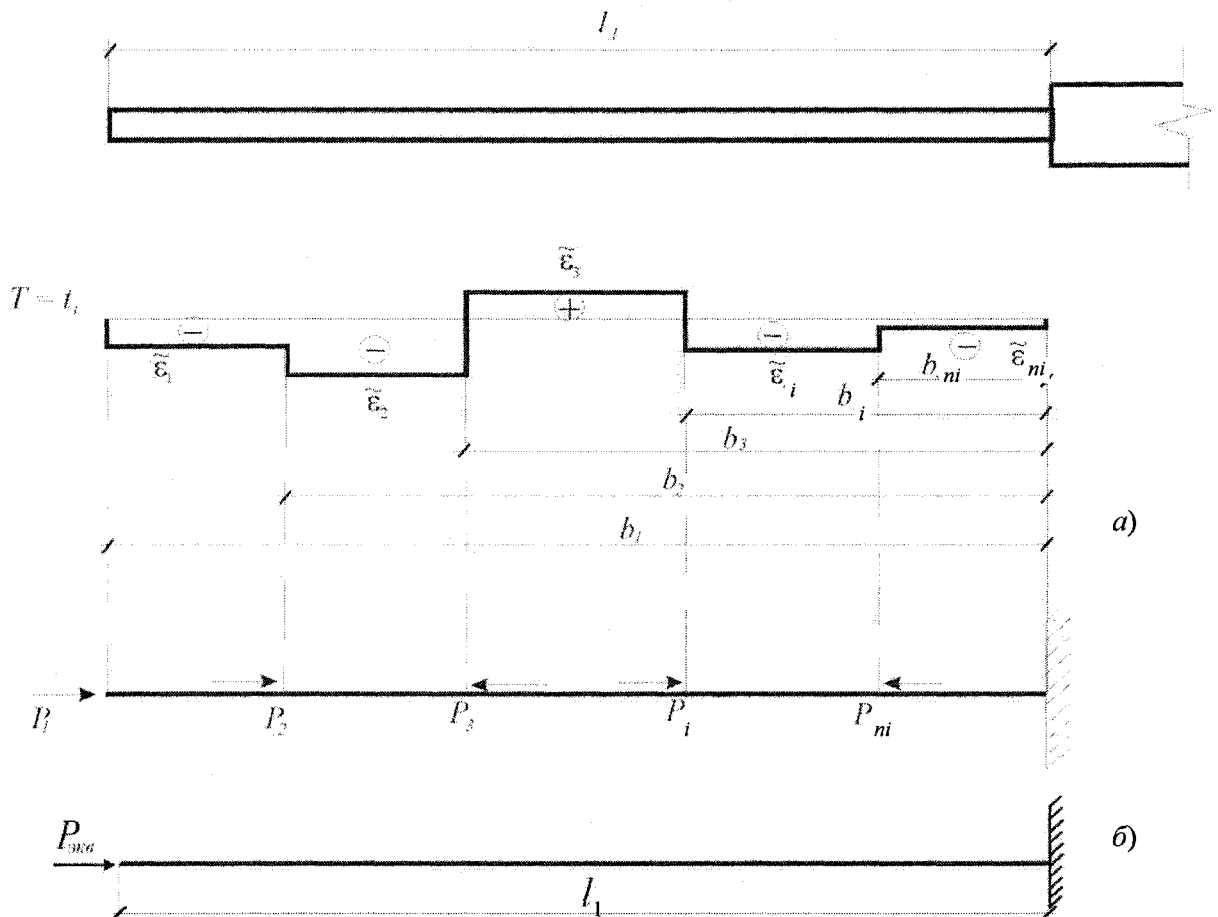


Рис. 2. а) диаграмма относительной продольной деформации для одного из участков произвольной многоступенчатой стержневой системы; б) эквивалентная схема нагружения рассматриваемого однородного участка стержневой системы

Аналогичным путем можно построить диаграмму для любого однородного участка [15]. Величину продольной силы P_i на первом однородном участке, в соответствии с законом Гука [13] и используя данные диаграммы, представим в виде

$$P_i = EA \frac{V_0}{a} (\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_{i-1}). \quad (14)$$

Для определения эквивалентной продольной нагрузки, приложенной в торце первого однородного участка (рис. 2, б), можно воспользоваться зависимостью (15), представленной в [13]:

$$P_{\text{эке}} = \left[P_1 \left(\frac{b_1}{l_1} \right)^2 + P_2 \left(\frac{b_2}{l_1} \right)^2 + \dots + P_i \left(\frac{b_i}{l_1} \right)^2 + P_n \left(\frac{b_n}{l_1} \right)^2 \right] \quad (15)$$

В формулах (14) и (15) a – скорость распространения продольной волны деформации в данном материале стержней, E – модуль упругости, A – площадь поперечного сечения рассматриваемого однородного участка, $\tilde{\varepsilon}_i$ – относительная продольная деформация на i -м отрезке рассматриваемого однородного участка многоступенчатого стержня, b_1, b_2, b_i, b_n – координаты приложения продольных сил P_i на этом участке.

Для тонких однородных участков ($l > 15d$, где l и d – соответственно длина и диаметр рассматриваемого участка или стержня) при расчете на устойчивость применима формула Эйлера [6, 13]

$$P_{\text{кр}} = \pi^2 EJ_{\text{min}} / (\mu l)^2, \quad (16)$$

где J_{min} – минимальный момент инерции поперечного сечения относительно главных центральных осей инерции, μ – коэффициент приведения длины, зависящий от схемы закрепления стержня [13], l – длина рассматриваемого однородного участка. В данном случае это будет длина l_1 , поскольку l обозначена общая длина ступенчатого стержня. Если рассматриваемый однородный участок жестко связан со вторым, то коэффициент приведения длины для первого однородного участка μ принимается равным 2 [13]. Аналогичным путем можно рассматривать любой однородный участок произвольной многоступенчатой стержневой системы и в зависимости от его связей с другими участками или с жесткой преградой μ будет принимать значения от 0,7 до 2 [6, 13].

Необходимо отметить, что в данном случае речь идет о динамической задаче, тогда как формула Эйлера применяется в случае статического нагружения. Ударная сила, действующая на стержень в результате волновых преобразований, рассматривается как постоянная статическая нагрузка в течение малого промежутка времени.

Для выполнения условия сохранения устойчивого состояния многоступенчатой стержневой системы необходимо, чтобы $P_{\text{эке}} < P_{\text{кр}}$, т. е. используя (14)–(16) и, учитывая, что для круглого

поперечного сечения $J_{\text{min}} = \frac{\pi d^4}{64}$, получим

$$V_0 < V_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 d^2 a}{16(\mu l_1)^2} \left[\tilde{\varepsilon}_1 \left(\frac{b_1}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_1) \left(\frac{b_2}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_3 - \tilde{\varepsilon}_2) \left(\frac{b_3}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_3) \left(\frac{b_i}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_n - \tilde{\varepsilon}_i) \left(\frac{b_n}{l_1} \right)^2 \right]^{-1} \quad (17)$$

Формула (17) применима для расчета критической предупредной скорости многоступенчатой стержневой системы с любым числом однородных участков.

Пример 2

Рассмотрим удар о жесткую преграду однородных стержней с длинами $l_1 = l_2 = 0,5l$. Соотношение площадей поперечных сечений первого и второго стержней $\tilde{A} = \frac{A_1}{A_2} = 0,5$ (рис. 3).

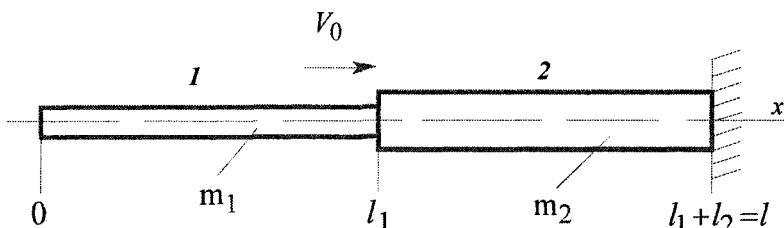


Рис. 3. Схема удара однородного стержня меньшего поперечного сечения о стержень, взаимодействующий с жесткой преградой

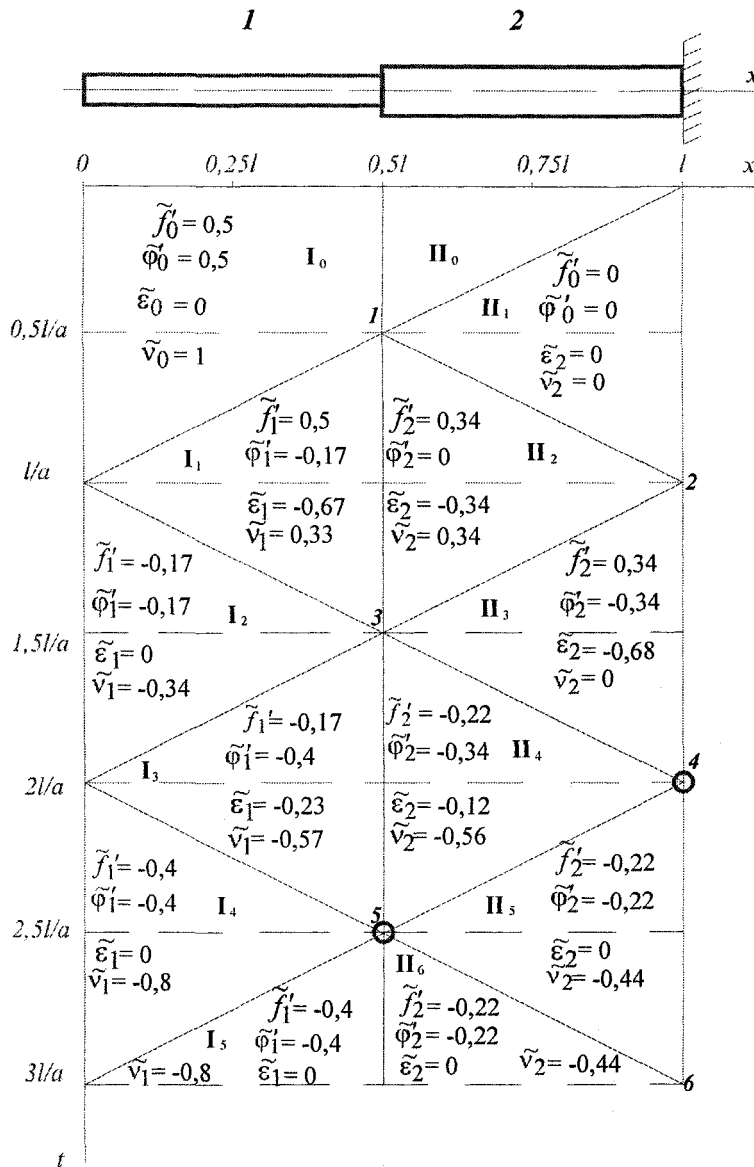


Рис. 4. Поле состояний при ударе однородного стержня меньшего поперечного сечения о стержень, взаимодействующий с жесткой преградой

Применим метод характеристик для построения поля состояний (рис. 4). Области состояний \$I_0 - I_5, II_0 - II_6\$ с соответствующими значениями \$\tilde{f}'(at - x), \tilde{\varphi}'(at + x), \tilde{\epsilon}(x, t), \tilde{v}(x, t)\$ определяют параметры прямых и обратных волн деформаций, продольную деформацию и скорость поперечных сечений. Длительность состояния для произвольного сечения определяется разностью ординат \$t\$, которые имеют точки наклонных линий для рассматриваемого сечения.

По данным поля состояний (рис. 4) строим диаграмму относительной продольной деформации \$\tilde{\epsilon}\$ (рис. 5).

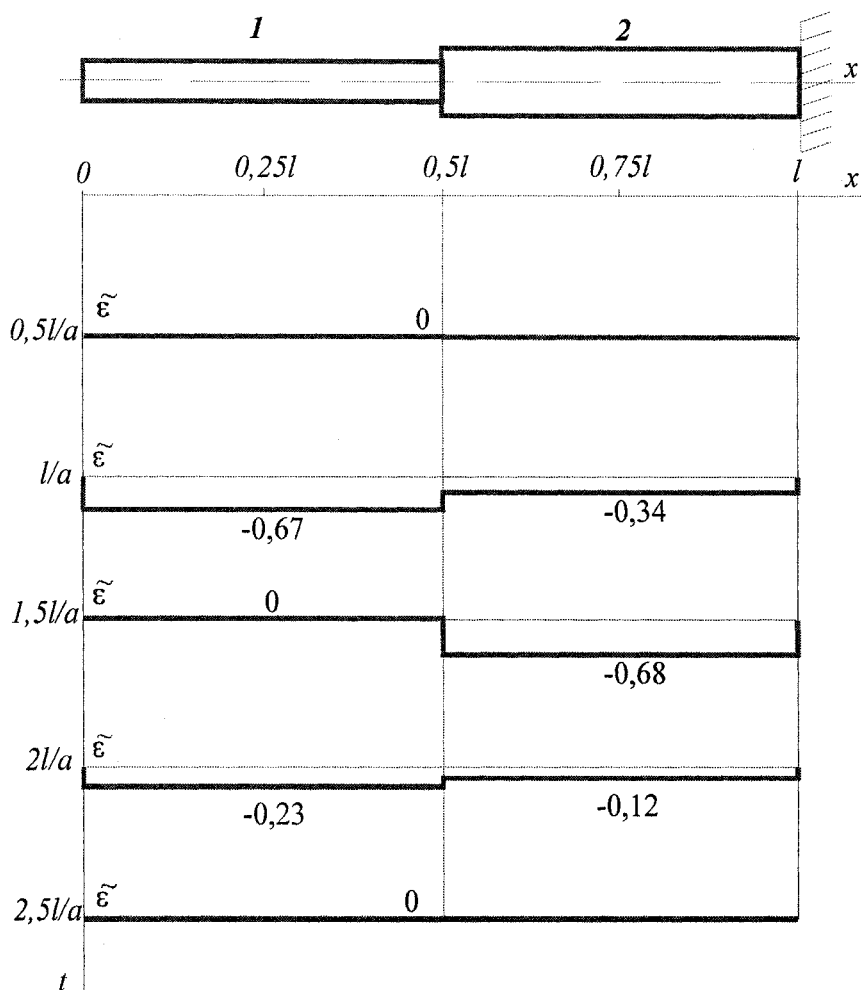


Рис. 5. Диаграмма относительной продольной деформации

Анализируя диаграмму, можно сделать вывод, что максимальное значение относительной продольной деформации на первом стержне имеет место при $t=1,0l/a$ ($\tilde{\epsilon}_{\max} = -0,67$). На втором стержне $\tilde{\epsilon}_{\max} = -0,68$ при $t=1,5l/a$. Следовательно, в данные моменты времени при достижении предударной скорости некоторого критического значения стержневая система может потерять устойчивость. Для расчета критической предударной скорости используем полученную формулу (17), в которую подставляем одно единственное значение относительной продольной деформации для каждого стержня: сначала $\tilde{\epsilon}_{\max} = -0,67$ для первого, затем $\tilde{\epsilon}_{\max} = -0,68$ для второго, получив два значения критической скорости. Учитывая коэффициент приведения длины $\mu=1$, соответствующий неукрепленным связям в сечении их взаимодействия и в сечении, взаимодействующим с жесткой преградой, получим соответствующие значения предударной скорости $V_{кр} = 0,37 \frac{\pi^2 d^2 a}{(l)^2}$ для первого и $V_{кр} = 0,36 \frac{\pi^2 d^2 a}{(l)^2}$ для второго стержней. Анализируя полученный результат, заключаем, что потеря устойчивости рассматриваемой стержневой системы наступит при $t=1,0l/a$, поскольку в данный момент времени достигается критическое значение предударной скорости для первого стержня.

Заключение

Применяя рассмотренный подход, можно рассчитать минимальную величину критической предударной скорости, при которой ступенчатая стержневая система любой конфигурации теряет устойчивое состояние при продольном ударе. Таким образом, волновая модель с применением метода характеристик позволяет получить достаточно простое решение задачи потери устойчивости при ударном взаимодействии.

Литература

1. Алимов, О.Д. Распространение волн деформаций в ударных системах / О.Д. Алимов, В.К. Манжосов, В.Э. Еремьянц. - М.: Наука, 1985. - 354 с.
2. Алфутов, Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алтуфов. - М.: Машиностроение, 1978. - 312 с.
3. Битюрин, А.А. Моделирование продольного удара однородных стержней при неустойчивых связях / А.А. Битюрин, В.К. Манжосов // Вестник УлГТУ. - 2005. - № 3. - С. 23-25.
4. Вольмир, А.С. Исследование процесса выпучивания стержней при ударе / А.С. Вольмир, И.Г. Кильдибеков // Доклады АН СССР. - 1966. - Т. 2. - Вып. 10. - С. 10-17.
5. Вольмир, А.С. Устойчивость упругих систем / А.С. Вольмир. - М.: ГИТТЛ, 1962.- 880 с.
6. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. - М.: Высшая школа, 2003.-641 с.
7. Лаврентьев, М.А. Динамические формы потери устойчивости упругих систем / М.А. Лаврентьев, А.Ю. Ишлинский // Доклады АН СССР. - 1949. - Т. 65, № 6. - С. 42-45.
8. Малый, В.И. Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе / В.И. Малый // Известия АН СССР. МТТ. - 1972. - № 4. - С. 138-144.
9. Малый, В.И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы / В.И. Малый // Известия АН СССР. МТТ. - 1973. - № 4. - С. 181-186.
10. Малый, В.И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Большие прогибы / В.И. Малый // Известия АН СССР. МТТ. - 1975. - № 1. - С. 52-61.
11. Малышев, Б.М. Устойчивость стержня при ударном сжатии / Б.М. Малышев // Известия АН СССР. МТТ. - 1966. - № 4. - С. 137-142.
12. Пановко, Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. - М.: Наука, 1987.-352 с.
13. Писаренко, Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев // Киев: Наукова думка, 1989. - 732 с.
14. Тимошенко, С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко // М.: Наука, 1974.-808 с.
15. Битюрин, А.А. Продольный удар неоднородного стержня о жесткую преграду / А.А. Битюрин, В.К. Манжосов // Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2009. - 164 с.

Поступила в редакцию 21 февраля 2010 г.

STABILITY LOSS OF THE HOMOGENEOUS CORE AT LONGITUDINAL IMPACT ON THE CORE, INTERACTING WITH THE HARD BARRIER

Mathematical modeling of longitudinal elastic central impact of a homogeneous core of a smaller cross-section on the homogeneous core integrating with a hard barrier with unilateral constraints in contact and impact sections is carried out. The rate of critical preimpact speed leading to loss of stability in the considered core system is simulated.

Keywords: longitudinal impact, stability, deformation, mathematical modeling, speed, hard barrier, core.

Bityurin Anatoly Aleksandrovich is a doctoral candidate, Ulyanovsk State Technical University.

Битюрин Анатолий Александрович - докторант, Ульяновский государственный технический университет.

e-mail: denjgy0706@yandex.ru