УДК 517.929

КОНУС УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т.Н. Хохлова

Построена некоторая поверхность в трехмерном пространстве, называемая конусом устойчивости. Доказано необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости матричного уравнения $x(t) + Ax(t) + Bx(t - \tau) = 0$ для матриц произвольного порядка, которое связано с тем, находятся ли вспомогательные точки, зависящие только от собственных чисел матриц A и B и величины запаздывания, внутри конуса устойчивости. От матриц A, B требуется совместная триангулируемость.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, асимптотическая устойчивость, конус устойчивости.

Введение

Рассматривается задача об асимптотической устойчивости уравнения

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + Bx(t-\tau) = 0,\ t \ge 0 \tag{1}$$

с коммутирующими матрицами A и B и запаздыванием $\tau > 0$.

Это уравнение моделирует динамику нейронных сетей Хопфилда [1]. Матрица A описывает собственную реакцию нейрона на внешнее воздействие, а матрица B характеризует реакцию нейрона, связанную с его взаимодействием с соседними нейронами.

В [1–7] получены некоторые достаточные условия устойчивости уравнения (1). В самой ранней публикации З. Рехлицкого [8] (1956 г.) указаны овалы устойчивости для (1) при $A = 0$, в одной из последних публикаций [9] (2009 г.) исследуется задача устойчивости (1) с 2×2 матрицами A, B специального вида.

Мы требуем одновременной приводимости матриц A и B к треугольному виду. Как известно [10], это возможно для коммутирующих A и B.

Уравнение (1) считаем устойчивым, если его нулевое решение является устойчивым. Рассмотрим вначале скалярный аналог уравнения (1), в котором $\tau = 1$:

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-1) = 0. \tag{2}$$

Пусть в (2) a – действительное, b – комплексное число. Следующий результат известен (см., например, [3]).

Теорема 1. Уравнение (2) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $a > -1$ и на плоскости (u_1, u_2) точка $(\operatorname{Re} b,\ \operatorname{Im} b)$ находится внутри овала с границей:

$$\begin{cases} u_1 = -\,a\cos w \ + \ w\sin w, \\ u_2 = -\,a\sin w \ - \ w\cos w, \\ -w_1 < w \le w_1, \end{cases} \tag{3}$$

где w_1 есть наименьший положительный корень уравнения $a = -w/\operatorname{tg} w$.

Если $a > -1$ и точка $(\operatorname{Re} b,\ \operatorname{Im} b)$ находится на границе овала (3), то уравнение (2) устойчиво (не асимптотически).

На основе теоремы 1 мы даем критерий устойчивости для матричного уравнения (1), в котором матрицы A и B приводятся к треугольному виду одним преобразованием.

Определение 1. Конусом устойчивости для уравнения (2) назовем поверхность в трехмерном пространстве (u_1, u_2, u_3), сечение которой на уровне $u_3 = a$ есть овал устойчивости (3).

Теорема 2. Пусть $A, B, S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $S^{-1}AS = A_T$ и $S^{-1}BS = B_T$, где A_T и B_T – нижние треугольные матрицы с элементами соответственно λ_{js}, μ_{js}, $1 \le j, s \le m$.

Построим систему точек $M_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j})$, $1 \le j \le m$:

$$u_{1j} = \tau |\mu_{jj}| \cos(\arg \mu_{jj} + \tau \operatorname{Im} \lambda_{jj}),$$
$$u_{2j} = \tau |\mu_{jj}| \sin(\arg \mu_{jj} + \tau \operatorname{Im} \lambda_{jj}), \quad (4)$$
$$u_{3j} = \tau \operatorname{Re} \lambda_{jj}.$$

Уравнение (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все точки M_j, $1 \le j \le m$ находятся внутри конуса устойчивости.

Если хотя бы одна точка M_j лежит вне конуса устойчивости, то уравнение (1) неустойчиво.

Доказательство. Умножим (1) на S^{-1} слева. Изменим масштаб времени, положив $t = \theta\tau$. Сделаем замену $x(t) = Sy(\theta)$. Получим

$$\dot{y}(\theta) + \tau A_T y(\theta) + \tau B_T y(\theta - 1) = 0. \quad (5)$$

Возвратим имя t переменной θ, положим $y = (y_1, \dots y_m)^T$ и выпишем (5) как треугольную систему скалярных уравнений $1 \le j \le m$:

$$\dot{y}_j + \tau\lambda_{jj} y_j + \tau\mu_{jj} y_j(t-1) = -\tau \sum_{k<j} \lambda_{jk} y_k + \mu_{jk} y_k(t-1). \quad (6)$$

В (6) сделаем замену $y_j = \exp(-i \operatorname{Im} \lambda_{jj} t) z_j$ и умножим (6) на $\exp(-i \operatorname{Im} \lambda_{jj} t)$. Получим треугольную систему с действительными коэффициентами при $z_j (1 \le j \le m)$:

$$\dot{z}_j + \tau \operatorname{Re} \lambda_{jj} z_j + \tau\mu_{jj} \exp(i\tau \operatorname{Im} \lambda_{jj}) z_j(t-1) = \sum_{k<j} \nu_{jk} z_k + \eta_{jk} z_k(t-1), \quad (7)$$

где ν_{jk}, η_{jk} – некоторые постоянные.

Наряду с (7) рассмотрим диагональную систему

$$\dot{z}_j + \tau \operatorname{Re} \lambda_{jj} z_j + \tau\mu_{jj} \exp(i\tau \operatorname{Im} \lambda_{jj}) z_j(t-1) = 0. \quad (8)$$

Пусть все точки $M_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}), 1 \le j \le m$, определенные равенством (4), лежат внутри конуса устойчивости. В сечении конуса плоскостью $u_3 = u_{3j} \in \mathbb{R}$ получим овал (3)

$$\begin{cases} u_1 = -\, u_{3j} \cos w + w \sin w, \\ u_2 = u_{3j} \sin w + w \cos w, \quad -w_1 \le w \le w_1, \end{cases} \quad (9)$$

где $w_1 \in (0, \pi)$ есть корень уравнения $u_{3j} = -w / \operatorname{tg} w$. Точка $M_{*j} = (u_{1j}, u_{2j}) \in \mathbb{R}^2$ лежит внутри этого овала.

Ввиду этого, как хорошо известно (см. [3], [5, Appendix B]), система уравнений (8) асимптотически устойчива.

Перейдем к системе (7). Первое из уравнений (7) совпадает с первым уравнением системы (8), и, следовательно, асимптотически устойчиво, а поэтому все его решения экспоненциально убывают. Во всех остальных уравнениях системы (7) мы последовательно видим асимптотически устойчивые левые части и экспоненциально убывающие правые части. Поэтому все их решения экспоненциально убывают [11]. Получаем, что система (7), а, следовательно, и (1) асимптотически устойчивы.

Пусть точка $M_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j})$, определенная равенством (4), лежит на поверхности конуса устойчивости или вне его. Не теряя общности, можем считать, что $j = 1$. В сечении конуса плоскостью $u_3 = u_{3j} \in \mathbb{R}$ получим овал (3). Если точка $M_{*1} = (u_{11}, u_{21})$ лежит на границе овала, то первое уравнение системы (7) не является асимптотически устойчивым, поскольку его характеристическое уравнение в этом случае имеет чисто мнимые корни. Если M_{*1} лежит вне овала, то уравнение (7) при $j = 1$ вообще неустойчиво (см. [3], [5, Appendix B]). Но система (7) (асимптотически) устойчива тогда и только тогда, когда (асимптотически) устойчива система (1). Теорема 2 доказана.

Рассмотрим примеры применения теоремы.

Пример 1. Положим в (1)

$$A=\begin{pmatrix} 0,9 & 6,5 \\ -4,8 & 0,9 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1,39 & 0,65 \\ -0,48 & 1,39 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Поскольку $B = 0,1A + 1,3I$, матрицы A, B коммутируют и, следовательно, могут быть совместно приведены к диагональной форме [10]. Собственные числа матриц A, B суть соответственно:

$$\lambda_{11,22} = 0,9000 \pm 5,5857i,\quad \mu_{11,22} = 1,3900 \pm 0,5586i. \qquad (11)$$

Вследствие симметрии изучим расположение конической винтовой линии $M_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j})$ относительно конуса устойчивости только при $j = 1$ (см. рис. 1).

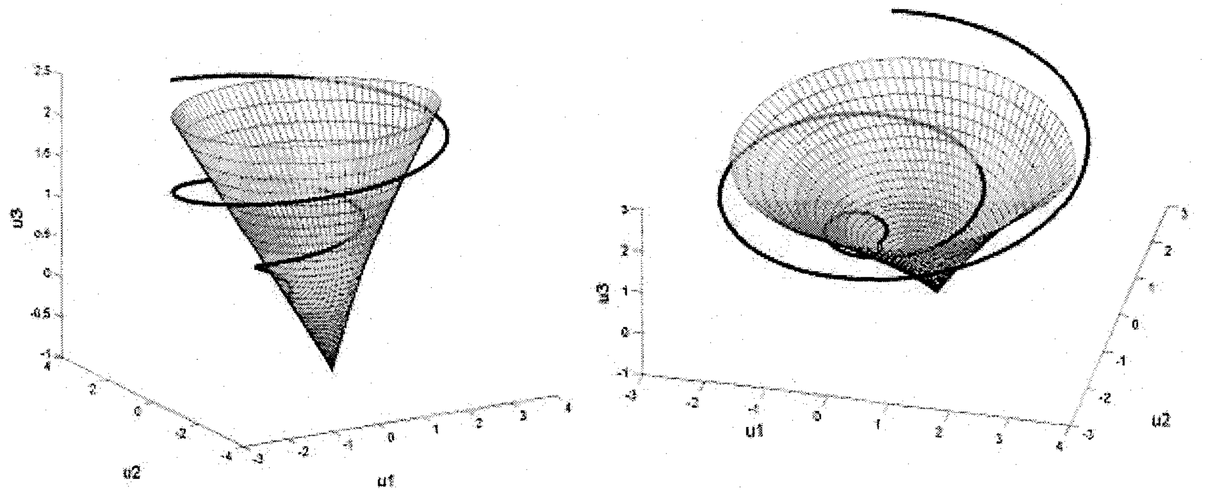

Рис. 1. Конус устойчивости и кривая (4), (11) в двух проекциях

Кривая (4), (7) дважды выходит из конуса устойчивости при значениях τ, равных $\tau_1 \approx 0,2715$, $\tau_3 \approx 1,1965$ и входит в конус при значении τ, равном $\tau_2 \approx 0,8392$. Поэтому уравнение (1) с матрицами (10) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$\tau \in (0, \tau_1) \cup (\tau_2, \tau_3).$$

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + Bx(t-\tau) = 0,$$

где

$$A=\begin{pmatrix} -0,1 & -0,01 & 0,03 & 2 \\ -0,03 & 0,1 & 0,5 & -0,3 \\ -1 & 5 & 0,04 & -2 \\ -0,3 & 0,02 & -0,1 & 0,01 \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

$$B = 0,3E - 0,1A + 1,5A^2.$$

Требуется определить, при каких значениях τ это уравнение устойчиво, а при каких неустойчиво.

Очевидно, матрицы A, B коммутируют. Собственные числа матриц A, B имеют вид:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -1,4943, && \mu_1 = 3,7989, \\ &\lambda_{2,3} = -0,0988 \pm 0,7539i, && \mu_{2,3} = -0,5280 \mp 0,2990i, \\ &\lambda_4 = 1,7420, && \mu_4 = 4,6777. \end{aligned} \qquad (13)$$

Построим точки $M_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j})$, $1 \le j \le 4$ и конус устойчивости и проследим их взаимное расположение с изменением τ. Четыре системы точек и конус устойчивости изображены на рис. 2.

Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы все точки $M_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j})$, $1 \le j \le 4$ находились внутри конуса устойчивости. Две системы точек, соответствующие комплексным собственным значениям матрицы A, с изменением τ образуют винтовые линии, выходящие из конуса при $\tau = 0$ и лежащие за его пределами при всех $\tau > 0$.

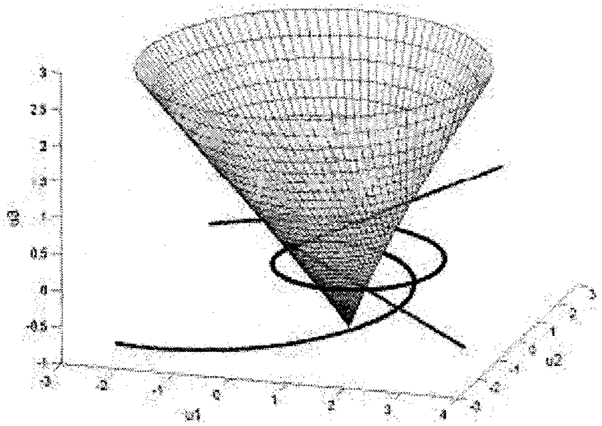

Рис. 2. Конус устойчивости и кривые (4), (13)

Две другие системы точек, соответствующие действительным собственным значениям матрицы A, образуют прямые, каждая из которых один раз пересекает конус устойчивости, а затем находится вне его.

Согласно теореме 2 для асимптотической устойчивости требуется, чтобы внутри конуса находились все точки $M_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j})$, $1 \le j \le m$. Поэтому уравнение (1) с матрицами (12) неустойчиво при любом m.

Литература

1. Gu, K. Stability of time-delay systems / K. Gu, V. Kharitonov, J.Chen. - Springer, 2003. - 376 с.
2. Idels, L. Stability criteria for a nonlinear nonautonomous system with delays / L. Idels, M. Kipnis // Applied Mathematical Modelling. - 2009. - V. 33. - Issue 5. - P. 2293-2297.
3. Кирьянен, А.И. Устойчивость систем с последействием и их приложения / А.И. Кирьянен. - Изд-во СПбУ. - 1994. - 235 с.
4. Кирьянен, А.И. Устойчивость уравнения $\dot{x}(t) = \alpha x(t-h) + \beta x(t)$ с комплексными коэффициентами / А.И. Кирьянен, К.В. Галунова // Уравнения в частных производных, ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1989. - С. 65-72.
5. Mori, T. Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delay / T. Mori, N. Fukuma, M. Kuwahara // Int. J. Control. - 1981. - V. 34. - P. 1175-1184.
6. Mori T. Stability of *x{t) = Ax(t) + Bx(t* - r) / T. Mori, H. Kokame // IEEE Trans. Autom. Control, 1989. - V. 34, № 4. - P. 460-462.
7. Shuenn-Shyang Wang Further results on stability of *x(t) - Ax(t) + Bx(t* - r) // Systems&Control Letters. - 1992. - V. 19. - Issue 2. - P. 165-168.
8. Рехлицкий, З.И. Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Изв. АН СССР. - 1956. - Т. 111. - С. 29-32.
9. Matsunaga, H. Stability Regions for Linear Delay Differential Equations with Four Parameters / H. Matsunaga // International Journal of Qualitative Theory of Differential Equations and Applications, 2009. - V. 3, № 1-2. - P. 99-107.
10. Horn, R. Matrix Theory / R. Horn, C Johnson // Cambridge Univ. Press. - 1986. - 561 с
11. Азбелев, Н.В. Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом / Н.В. Азбелев, П.М. Симонов // Изв. вузов. Математика. - 1997. -№ 6. - С. 3-16.

Поступила в редакцию 28 июня 2010 г.

STABILITY CONE FOR THE RETARDED LINEAR MATRIX DIFFERENTIAL EQUATION

Some surface in the three-dimensional space, named a stability cone is constructed. The necessary and sufficient condition of asymptotic stability of the matrix equation $\dot{x}(t)+Ax(t)+Bx(t-\tau)=0$ for random order matrixes which is connected with whether there are the auxiliary points which depend only on A and B matrix eigenvalues and on retardation value in a stability cone is proved. The matrixes A, B are required a joint triangulability.

Keywords: retorted differential equations, asymptotic stability, stability cone.

Hohlova Tatyana is Post-graduate Student, Mathematical Analysis Department, South Ural State University.

Хохлова Татьяна - аспирант, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет.