УДК 517.929

УСЛОВИЯ ВЫЖИВАНИЯ ПОПУЛЯЦИИ В МОДЕЛЯХ НИКОЛСОНА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.Д. Хохлов

Рассматривается модель Николсона с запаздыванием, описывающая динамику численности популяции. Изучаются свойства решений этой модели, доказывается равномерная отделённость решений от нуля и находится нижняя оценка решений как функция параметров модели. Исследуется двухзонная модель, построенная на основе модели Николсона. Устанавливаются нижние оценки решений при различных сочетаниях параметров.

Ключевые слова: динамика численности популяции, отделённость от нуля, модель Николсона.

Введение

Актуальной задачей математического моделирования является задача описания динамики численности популяции. Одним из свойств решений моделей, описывающих динамику численности популяции, является отделённость решений от нуля при определённых сочетаниях параметров модели, что обеспечивает выживание популяции. Знание функциональной связи между нижними оценками решений и параметрами моделей позволяет делать выводы о развитии популяции в будущем, не находя решений в явном виде.

Модель Николсона

Модель Николсона [1] динамики численности одной популяции описывается дифференциальным уравнением с запаздыванием $\tau > 0$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = P \cdot x(t-\tau) \cdot e^{-\alpha \cdot x(t-\tau)} - \delta \cdot x(t), \quad t \ge 0, \tag{1}$$

$$x(s) = \varphi(s) \text{ для } s \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

$$\varphi \in C([-\tau, 0], R^+) \text{ и } \varphi(0) > 0,$$

где $x(t)$ – численность популяции в момент времени t; $P > 0$ – коэффициент рождаемости; $\tau > 0$ – время созревания особи; $\alpha > 0$ – коэффициент системы; $\delta > 0$ – коэффициент смертности; $\varphi(s)$ – начальная функция.

При исследовании решений моделей, описывающих численность популяции, важной задачей является определение условий равномерной отделённости решений от нуля, что обеспечивает сохранение популяции [2]. При различных сочетаниях параметров уравнения P, δ найдены показатели живучести популяции в виде функции $\eta(P, \delta)$.

Теорема 1. При $\delta < P \le \delta e$ для любого решения $x(t)$ задачи (1)–(2) верно равенство

$$\liminf_{t \to \infty} x(t) = \eta = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{P}{\delta}\right). \tag{3}$$

При $P > \delta e$ для любого решения $x(t)$ модели (1)–(2) верно неравенство

$$\liminf_{x \to \infty} x(t) \ge \eta = \frac{P^2}{\alpha \delta^2 e} e^{-\frac{P}{\delta e}}. \tag{4}$$

Таким образом, условием выживания популяции в данной модели является выполнение неравенства $P > \delta$.

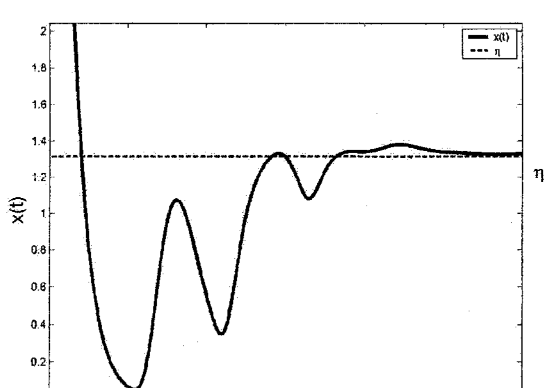

Рис. 1. Отделённость от нуля устойчивого решения модели с параметрами из первой части теоремы 1

На рис. 1 представлено устойчивое решение модели Николсона с параметрами, соответствующими первой части теоремы 1 (сплошная линия), а также найденный теоретически показатель живучести η (пунктирная линия). С течением времени решение стремится к показателю η.

На рис. 2 представлено неустойчивое решение модели Николсона с параметрами, соответствующими второй части теоремы 1. С течением времени решение становится больше найденного теоретически показателя живучести η.

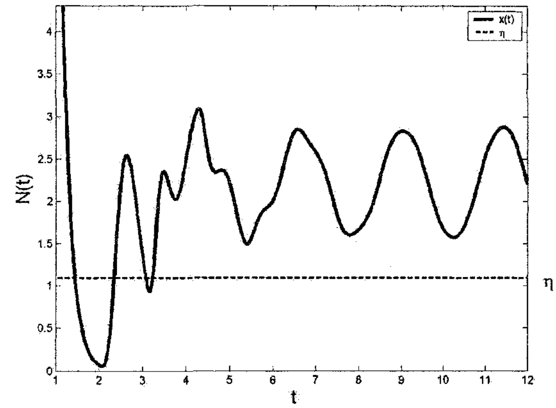

Рис. 2. Отделённость от нуля неустойчивого решения модели с параметрами из второй части теоремы 1

Двухзонная модель

Двухзонная модель, построенная на основе модели Николсона, описывает динамику численности рыбной популяции, находящейся в двух относительно изолированных зонах, причём рыбалка разрешена только во второй зоне. Рыба может мигрировать из одной зоны в другую. Данная модель описывается системой двух уравнений с запаздыванием [2]. Эта модель принадлежит классу нелинейных уравнений с запаздыванием и выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -m_1 \cdot x_1(t) - d_1 \cdot x_1(t) + d_2 \cdot x_2(t) + \gamma_1 \cdot x_1(t-\tau) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot x_1(t-\tau)}, \\ \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -m_2 \cdot x_2(t) - d_2 \cdot x_2(t) + d_1 \cdot x_1(t) + \gamma_2 \cdot x_2(t-\tau) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot x_2(t-\tau)} - h \cdot x_2(t), \end{cases} \quad (5)$$

$$x_i(s) = \varphi_i(s) \text{ для } s \in [-\tau, 0],\ i = 1,2, \quad (6)$$

$$\varphi \in C([-\tau,0], R^+) \text{ и } \varphi(0) > 0,$$

где $x_1(t), x_2(t)$ – численность популяции в момент времени t; $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ – коэффициенты смертности; $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ – коэффициенты рождаемости; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ – репродуктивная сила; $d_1 > 0$ – коэффициент миграции рыбы из зоны 1 в зону 2; $d_2 > 0$ – коэффициент миграции рыбы из зоны 2 в зону 1; $h > 0$ – коэффициент рыбалки в зоне 2; $\tau > 0$ – запаздывание, связанное с воспроизводством популяции.

Будем иметь в виду, что индексы 1 и 2 обозначают зоны 1 и 2 соответственно.

Для сохранения популяции необходимо, чтобы

$$\exists \mu > 0 \quad \liminf_{t\to\infty} x_i(t) \ge \mu, \quad i = 1,2. \quad (7)$$

Но для того чтобы судить о выживаемости, необходимо знать показатель живучести μ как функцию от параметров уравнения $\mu(m_1, m_2, \gamma_1, \gamma_2, d_1, d_2, \alpha_1, \alpha_2, h)$.

Для задачи (5)–(6) доказана следующая теорема.

Теорема 2. Для всякой траектории системы (5) с положительными начальными условиями выполняются неравенства:

1) При $m_1 + d_1 < \gamma_1 \le (m_1 + d_1)e$, $m_2 + d_2 + h < \gamma_2 \le (m_2 + d_2 + h)e$

$$\liminf_{t\to\infty} x_1(t) \ge \mu_1, \quad \liminf_{t\to\infty} x_2(t) \ge \mu_2. \quad (8)$$

2) При $\gamma_1 > (m_1 + d_1)e$, $\gamma_2 > (m_2 + d_2 + h)e$

$$\liminf_{t\to\infty} x_1(t) \ge \mu_3, \quad \liminf_{t\to\infty} x_2(t) \ge \mu_4. \quad (9)$$

3) При $m_1 + d_1 < \gamma_1 \le (m_1 + d_1)e$, $\gamma_2 > (m_2 + d_2 + h)e$

$$\liminf_{t\to\infty} x_1(t) \ge \mu_1, \quad \liminf_{t\to\infty} x_2(t) \ge \mu_4. \quad (10)$$

4) При $\gamma_1 > (m_1 + d_1)e$, $m_2 + d_2 + h < \gamma_2 \le (m_2 + d_2 + h)e$

$$\liminf_{t\to\infty} x_1(t) \ge \mu_3, \quad \liminf_{t\to\infty} x_2(t) \ge \mu_2, \quad (11)$$

где

$$\mu_i = \frac{1}{\alpha_i} \ln \frac{\gamma_i}{m_i + d_i} > 0, \quad i = 1,2, \tag{12}$$

$$\mu_j = \frac{\gamma_j^2}{\alpha_j (m_j + d_j)^2} e^{-\frac{\gamma_j}{(m_j + d_j)e}} > 0, \ j = 3,4.$$

Теорема 2 определяет функциональную связь между коэффициентами живучести популяции в обеих зонах и параметрами системы. Это позволяет, не решая уравнения, а зная только его параметры, определить, выживет популяция в будущем или нет.

На рис. 3 и 4 представлены фазовые траектории решений задачи (5)–(6), параметры которой удовлетворяют условиям теоремы 2.

На рис. 3 изображена траектория устойчивого решения (со следующими параметрами: $m_1 = 0,2$, $m_2 = 0,5$, $\gamma_1 = 3,3$, $\gamma_2 = 3,7$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $\alpha_1 = 0,16$, $\alpha_2 = 0,9$, $h = 0,7$), а на рис. 4 (с параметрами: $m_1 = 0,2$, $m_2 = 0,5$, $\gamma_1 = 2,2$, $\gamma_2 = 13,7$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $\alpha_1 = 0,16$, $\alpha_2 = 0,9$, $h = 0,7$) траектория неустойчивого решения модели. На графике показаны две прямые, представляющие показатели живучести для первой и второй зон соответственно. В обоих случаях наблюдается отделённость решений от нуля независимо от устойчивости.

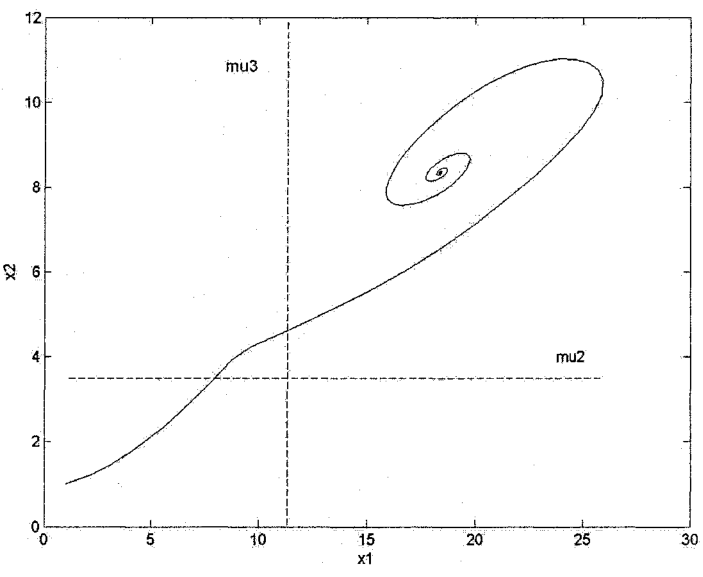

Рис. 3. Отделённость от нуля устойчивого решения модели с параметрами из п. 4 теоремы 2

Вывод

Для двух моделей представлены условия равномерной отделённости решений от нуля, а также найдены показатели живучести как функции от параметров моделей. На приведённых графиках можно проследить поведение решений моделей относительно найденных показателей живучести. Полученные результаты имеют прикладное значение и могут быть применены для анализа численности популяции.

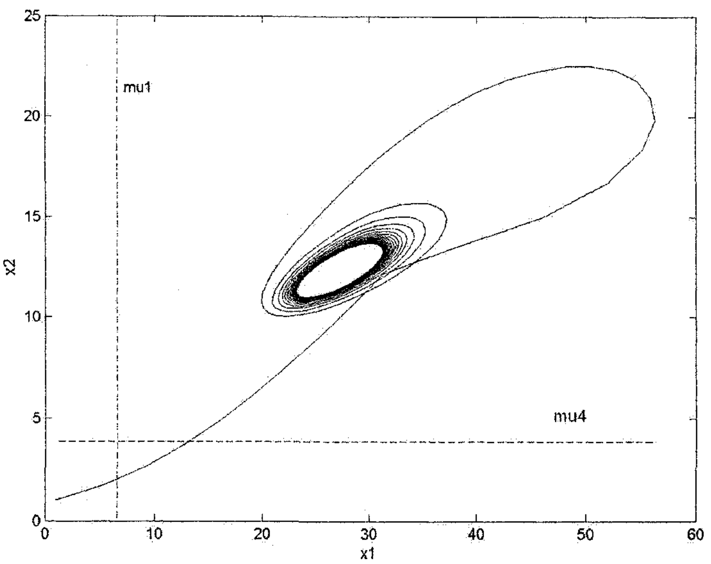

Рис. 4. Отделённость от нуля неустойчивого решения модели с параметрами из п. 3 теоремы 2

Литература

1. Nicholson, A. J. An outline of the dynamics of animal populations / A. J. Nicholson // Austral. J. Zoo, 1954.-№2.-P. 9-65.

2. Hale, J. K. Persistence in infinite dimensional systems / J. K Hale, P. Waltman // SIAM J. Math. Anal. - 1989. -№ 20. - P. 388-395.

3. Idels, L. Stability criteria for a nonlinear nonautonomous system with delays / L. Idels, M. Kipnis // Applied Mathematical Modelling, 2009. - V. 33. - Issue 5. - P. 2293-2297.

4. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. - М.: Мир, 1967.-548 с.

*Поступила в **редакцию 28 июня 2010** г.*

CONDITIONS OF THE SURVIVAL OF POPULATION IN NICHOLSON'S MODELS WITH DELAY

The Nicholson's model with delay describing dynamics of the magnitude of population is considered. Properties of the model solutions are analyzed, equal apartness of solutions from zero is proved and a lower estimation of decisions as function of the model parameters is found. A two-band model constructed on the basis of Nicholson's model is analyzed. The lower estimations of solutions with various parameters combinations are found.

Keywords; dynamics of the magnitude of population, apartness from zero, Nicholson's model.

Khokhlov Arthur is Post-graduate Student, Mathematical Analysis Department, South Ural State University.

Хохлов **Артур** - аспирант, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет.