УДК 517.948

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е.В. Табаринцева

Рассматривается задача восстановления граничных условий третьего рода по дополнительной информации о решении параболического уравнения. Рассматривается метод приближенного решения поставленной задачи с выбором параметра регуляризации по схеме М.М. Лаврентьева [1] и с использованием одной из схем апостериорного выбора параметра регуляризации. Получена точная по порядку оценка погрешности построенного приближенного решения на одном из классов равномерной регуляризации.

Ключевые слова: обратная задача, метод приближенного решения, оценка погрешности.

Постановка задачи

Рассматривается задача восстановления функции $z(t)=u(1,t)+h_1u_x(1,t)$, $z(t)\in L_2[0,\infty)$ (граничного условия третьего рода), где функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a(x)u\ (0<x<1;\ t>0),\ u(x,0)=0;\ u(0,t)+h_0u_x(0,t)=0 \quad (1)$$

и дополнительному условию

$$u(x_0,t)=p(t),\ x_0\in(0,1),\ t>0. \quad (2)$$

Здесь $a(x)\in C^2[0,1]$, $a(x)\geq 0$, h_0, h_1 – заданные постоянные, $u(\bullet,t)\in C^2(0,1)\bigcap C([0,1])$; $u(x,\bullet)\in W_2^1(0,\infty)$.

Рассматривая вспомогательную «прямую» задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a(x)u,$$
$$u(x,0)=0;u(0,t)+h_0u_x(0,t)=0;\ u(x_0,t)=p(t),$$

где $a(x)\in C^2[0,1]$, $x\in(0,x_0)$, $t>0$, $u(\bullet,t)\in C^2(0,x_0)\bigcap C([0,x_0])$; $u(x,\bullet)\in W_2^1(0,\infty)$, определим функцию $q(t)=u_x(x_0,t)$. Следовательно, исходная задача сведется к задаче восстановления функций $v(t)=u(1,t)$ и $w(t)=u_x(1,t)$, где $u(x,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a(x)u,\ u(x,0)=0;\ u(x_0,t)=p(t);\ u_x(x_0,t)=q(t), \quad (3)$$

$x\in(x_0,1)$, $t>0$.

Сведение задачи (3) к задаче вычисления значений неограниченного оператора

Пусть функции $p(t),q(t),p'(t),q'(t)$ в задаче (3) принадлежат $L_2(0,\infty)$. Рассмотрим вспомогательную прямую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a(x)u,$$
$$u(x,0)=0;\ u(x_0,t)=p(t);\ u(1,t)=v(t), \quad (4)$$

$x\in(x_0,1)$, $t>0$.

Лемма 1. Пусть $p(t),p'(t),v(t),v'(t)\in L_2[0,\infty)$. Тогда задача (4) имеет решение $u(\bullet,t)\in C^2(x_0,1)\bigcap C([x_0,1])$; $u(x,\bullet)\in W_2^1(0,\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим формальное решение задачи (4), которое может быть найдено методом Фурье:

$$u(x,t)=g(x,t)+\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi,t-\tau)f(\varsigma,\tau)d\varsigma d\tau, \quad (5)$$

где

$$g(x,t)=\frac{v(t)-p(t)}{1-x_0}x+\frac{p(t)-x_0v(t)}{1-x_0},\quad f(x,t)=\frac{v'(t)-p'(t)}{1-x_0}x+\frac{p'(t)-x_0v'(t)}{1-x_0},$$

$$G(x,\varsigma,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2 t}X_n(\varsigma)X_n(x)$$

– функция Грина первой краевой задачи; $X_n(x)$ – собственные функции, образующие полную ортонормированную систему в $L_2[x_0,1]$, $-\lambda_n^2$ – собственные значения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. Рассмотрим следующие функциональные ряды, сходящиеся равномерно на $[x_0,1]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(x))^2}{\lambda_n^2};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X'_n(x))^2}{\lambda_n^4}$$

(см. [6, с. 500]). Для произвольных $x,\varsigma\in[0,1], t>t_0>0$ с учетом неравенства Коши–Буняковского имеем оценки:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2 t}X_n(\varsigma)X_n(x)\right|\le\sup_{\lambda_n}\lambda_n^2e^{-\lambda_n^2 t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(x))^2}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(\varsigma))^2}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\le\frac{c_0}{t},\tag{6}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2 t}X_n(\varsigma)X_n{}'(x)\right|\le\sup_{\lambda_n}\lambda_n^4e^{-\lambda_n^2 t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n{}'(x))^2}{\lambda_n^4}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(\varsigma))^2}{\lambda_n^4}\right)^{1/2}\le\frac{c_1}{t^2},\tag{7}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2 t}X_n(\varsigma)X_n{}''(x)\right|\le\sup_{\lambda_n}\lambda_n^4e^{-\lambda_n^2 t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(x))^2}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(\varsigma))^2}{\lambda_n^4}\right)^{1/2}\le\frac{c_2}{t^2},\tag{8}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda_n^2 t}\right)_t X_n(\varsigma)X_n(x)\right|\le\sup_{\lambda_n}\lambda_n^4e^{-\lambda_n^2 t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(x))^2}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(\varsigma))^2}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\le\frac{c_3}{t^2}.\tag{9}$$

Из неравенств (6)–(9) следует, что функция $G(x,\varsigma,t)$ имеет непрерывные производные $G_x(x,\varsigma,t)$, $G_{xx}(x,\varsigma,t)$, $G_t(x,\varsigma,t)$ при всех $x,\varsigma\in[0,1], t>t_0>0$.

Рассмотрим произвольное число $t>0$ и зафиксируем t_0, $0<t_0<t$. Очевидно, при $0\le\tau\le t_0$ функции $G(x,\varsigma,t-\tau)$, $G_x(x,\varsigma,t-\tau)$, $G_{xx}(x,\varsigma,t-\tau)$, $G_t(x,\varsigma,t-\tau)$ непрерывны. Рассмотрим ряд

$$P(x,\varsigma,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}|X_n(\varsigma)||X_n(x)|\tag{10}$$

и ряд, полученный почленным интегрированием (10):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t}e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau|X_n(\varsigma)||X_n(x)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}}{\lambda_n^2}|X_n(\varsigma)||X_n(x)|.\tag{11}$$

Из оценки, аналогичной (6), следует сходимость ряда (11) при всех $x,\varsigma\in[0,1]$. По следствию из теоремы Б. Леви [7] ряд (10) сходится почти всюду на отрезке $0\le\tau\le t$ и функция $P(x,\varsigma,\tau)$ (а, следовательно, $G(x,\varsigma,t-\tau)$) суммируема на отрезке $0\le\tau\le t$.

Используя свойство абсолютной непрерывности интеграла, по заданному числу $\varepsilon>0$ выберем $t_0>0$ такое, что

$$\left|\int_{t_0}^{t}G(x,\xi,t-\tau)f(\varsigma,\tau)d\tau\right|<\varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\int_0^tG(x,\xi,t-\tau)f(\varsigma,\tau)d\tau\right|<\left|\int_0^{t_0}G(x,\xi,t-\tau)f(\varsigma,\tau)d\tau\right|+\varepsilon\le C\left|\int_0^{t_0}f(\varsigma,\tau)d\tau\right|+\varepsilon\le C\max_{x\in[0,1]}|g(x,t_0)|.$$

С учетом последнего неравенства из (5) следует оценка

$$|u(x,t)| \le C \max_{x\in[0,1]} |g(x,t)|.$$

Рассмотрим ряд

$$S(x,t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n(t) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} X_n(x), \tag{11}$$

где $f_n(t) = \int_{x_0}^{1} f(\xi,t) X_n(\xi) d\xi = \frac{v'(t)-p'(t)}{1-x_0}\int_{x_0}^{1}\xi X_n(\xi)d\xi + \frac{p'(t)-x_0 v'(t)}{1-x_0}\int_{x_0}^{1} X_n(\xi)d\xi$ – коэффициенты Фурье функции $f(x,t)$. Воспользуемся следующим утверждением [10, с. 414].

Утверждение 1. Существует такая постоянная C, что для каждого n и в каждой точке $x\in[x_0,1]$

$$\left| X_n(x) - \sqrt{\frac{2}{1-x_0}}\sin\lambda_n x \right| \le \frac{C}{n}.$$

Из утверждения 1 следует, что

$$\left|\int_{x_0}^{1} X_n(\xi)d\xi\right| \le \sqrt{\frac{2}{(1-x_0)}}\frac{2}{\lambda_n} + \frac{C(1-x_0)}{n}; \tag{12}$$

$$\left|\int_{x_0}^{1} \xi X_n(\xi)d\xi\right| \le \sqrt{\frac{2}{(1-x_0)}}\left|\int_{x_0}^{1}\xi\sin\lambda_n\xi d\xi\right| + \frac{c}{n}\int_{x_0}^{1}\xi d\xi \le \frac{c_1}{\lambda_n} + \frac{c_2}{n}. \tag{13}$$

Так как существует такая константа c, что при каждом n

$$\left|\lambda_n^2 - \frac{\pi^2 n^2}{(1-x_0)^2}\right| \le c$$

(см. [10, с. 414]), то из оценок (12) и (13) следует существование такой постоянной D, что

$$\left|\int_{x_0}^{1} X_n(\xi)d\xi\right| \le \frac{D}{\lambda_n}, \tag{14}$$

$$\left|\int_{x_0}^{1} \xi X_n(\xi)d\xi\right| \le \frac{D}{\lambda_n}, \tag{15}$$

при всех n. С учетом (14) и (15) из неравенства (11) следует

$$|S(x,t,\tau)| \le D_1 \frac{|v'(t)|+|p'(t)|}{1-x_0}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}X_n(x)\right| \le \max_{\lambda}\lambda^{3/2}e^{-\lambda^2(t-\tau)}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right|. \tag{16}$$

Так как в силу утверждения 1 ряд в правой части (16) сходится при каждом $x\in[x_0;1]$, то оценка (16) принимает вид

$$|S(x,t,\tau)| \le \frac{r(x)}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Следовательно, функция $S(x,t,\tau)$ суммируема на отрезке $\tau\in[0,t]$ при каждом x.

Далее, используя неравенство (5)

$$|u_x(x,t)| \le C_1 \max_{x\in[0,1]}|g(x,t)|;\ |u_{xx}(x,t)| \le C_2 \max_{x\in[0,1]}|g(x,t)|;\ |u_t(x,t)| \le C_3\left(\max_{x\in[0,1]}|g(x,t)| + |g'(x,t)|\right).$$

Из полученных оценок следует, что $u_{xx}(x,t),\ u_t(x,t)\in L_2(0,\infty)$ при любом $x\in[0,1]$. Таким образом, функция $u(x,t)$ является решением задачи (4). Из полученных оценок следует также, что к задаче (3) применимо преобразование Фурье на полупрямой $t\in(0,\infty)$.

Применяя к задаче (3) преобразование Фурье, имеем следующую задачу для линейного обыкновенного уравнения второго порядка:

$$U_{xx}(x,\lambda)=i\lambda U(x,\lambda)-a(x)U(x,\lambda);\ U(x_0,\lambda)=P(\lambda);\ U_x(x_0,\lambda)=Q(\lambda). \quad (17)$$

Здесь $U(x,\lambda)=Fu=\int\limits_0^\infty e^{-i\lambda t}u(x,t)dt$ – образ Фурье функции $u(x,t)$.

Обозначим через $\varphi(x,t)$ решение уравнения (17), удовлетворяющее условиям $\varphi(x_0,t)=0;\ u_x(x_0,t)=1$; $\psi(x,t)$ – решение уравнения (17), удовлетворяющее условиям $\psi(x_0,t)=1;\ \psi_x(x_0,t)=0$.

Теорема 1. Существуют постоянные $C_1,C_2,C_3,C_4,D_1,D_2,D_3,D_4,\tau$ такие, что

$$C_1\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}(x-x_0)}{\sqrt{\lambda}}\le|\varphi(x,\lambda)|\le C_2\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}(x-x_0)}{\sqrt{\lambda}};\ C_3\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}(x-x_0)\le|\varphi_x(x,\lambda)|\le C_4\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}(x-x_0);$$

$$D_1\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}(x-x_0)\le|\psi(x,\lambda)|\le D_2\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}(x-x_0);\ D_3\sqrt{\lambda}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}(x-x_0)\le|\psi_x(x,\lambda)|\le D_4\sqrt{\lambda}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}(x-x_0)$$

при $\lambda>\tau$.

Доказательство теоремы аналогично проведенному в [2].

Решение задачи (17) имеет вид

$$U(\lambda)=P(\lambda)\psi(1,\lambda)+Q(\lambda)\varphi(1,\lambda),\quad W(\lambda)=P(\lambda)\psi_x(1,\lambda)+Q(\lambda)\varphi_x(1,\lambda).$$

Рассмотрим следующие линейные нормированные пространства: $L_2(0,\infty)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом, определенных при $t\in[0,\infty)$ (принимающих действительные значения), $X=L_2(0,\infty)\times L_2(0,\infty)$; Φ – пространство функций, допускающих аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Im}z<0$ и таких, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|F(s+i\sigma)|^2\,ds<C$$

при всех $\sigma<0$; $Y=\Phi\times\Phi$. Выполняется следующая теорема (см., напр., [9])

Теорема 2. Класс функций Φ совпадает с классом функций, представимых в виде

$$F(\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{-i\lambda t}f(t)dt,$$

где интеграл сходится в среднем и $\int\limits_0^\infty|f(t)|^2dt<\infty$.

Рассмотрим равенство Парсеваля

$$\int\limits_0^\infty|f(t)|^2dt=2\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2d\lambda$$

(см. [8]). Так как, очевидно, для функции $f(t)$ с действительными значениями выполняется равенство $F(-\lambda)=\overline{F}(\lambda)$, то из равенства Парсеваля следует

$$\int\limits_0^\infty|f(t)|^2dt=4\pi\int\limits_0^{+\infty}|F(\lambda)|^2d\lambda.$$

Следовательно, линейный оператор $F_0:L_2[0,1]\to\Phi$, действующий по правилу

$$F_0(\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-i\lambda t}f(t)dt,$$

является изометрией. Значит, пространства X и Y также изометричны.

Таким образом, задача (3) сводится к задаче вычисления элемента $\begin{pmatrix}V(\lambda)\\W(\lambda)\end{pmatrix}\in Y$ такого, что

$$\begin{pmatrix}V(\lambda)\\W(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi(1,\lambda)&\varphi(1,\lambda)\\\psi_x(1,\lambda)&\varphi_x(1,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P(\lambda)\\Q(\lambda)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}P(\lambda)\\Q(\lambda)\end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $A:Y\to Y$ – неограниченный линейный оператор.

Метод приближенного решения

Пусть вместо точных исходных данных $p(t), q(t)$ в задаче (3) известны δ – приближения $p_\delta(t)$, $q_\delta(t)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|p - p_\delta\| \le \delta$; $\|q - q_\delta\| \le \delta$. Пусть известно также, что при точно заданных начальных данных $p(t)$, $q(t)$ задача (3) имеет решение, принадлежащее классу равномерной регуляризации

$$M_r = \{(v, w) \in X;\ \ (v', w') \in X,\ \ \|(v', w')\|_X \le r\}.$$

Используя метрическую эквивалентность задач (3) и (6), построим предварительно приближенное решение задачи (6). Известно, что при заданных начальных условиях P и Q задача (6) имеет решение, принадлежащее классу равномерной регуляризации

$$\tilde{M}_r = \{G \in Y;\ \ \lambda G \in Y,\ \ \|\lambda G\|_Y \le r\}.$$

Требуется построить устойчивое приближенное решение задачи (3) и оценить его уклонение от точного решения.

Рассмотрим регуляризованные начальные данные:

$$v_\delta^\varepsilon(t) = v_\delta(t) * \omega_\varepsilon(t) = \int_t^\infty v_\delta(t-\tau)\omega_\varepsilon(\tau)d\tau;\quad w_\delta^\varepsilon(t) = w_\delta(t) * \omega_\varepsilon(t) = \int_t^\infty w_\delta(t-\tau)\omega_\varepsilon(\tau)d\tau,$$

где

$$\omega_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2},\ t \ge 0, \\ 0,\ t < 0. \end{cases}$$

В качестве приближенного решения задачи (3) будем рассматривать элемент

$$z_\delta(t) = \begin{pmatrix} v_\delta(t) \\ w_\delta(\lambda) \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} p_\delta^\varepsilon(t) \\ w_\delta^\varepsilon(\lambda) \end{pmatrix},$$

образ Фурье которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} V_\delta^\varepsilon(\lambda) \\ W_\delta^\varepsilon(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(1,\lambda) & \varphi(1,\lambda) \\ \psi_x(1,\lambda) & \varphi_x(1,\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_\delta^\varepsilon(\lambda) \\ Q_\delta^\varepsilon(\lambda) \end{pmatrix} = Ae^{-\lambda\varepsilon} \begin{pmatrix} P_\delta(\lambda) \\ Q_\delta(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в качестве приближенного решения задачи (6) рассматривается элемент

$$Z_\delta^\varepsilon(\lambda) = Ae^{-\lambda\varepsilon} P_\delta = A^\varepsilon P_\delta. \tag{19}$$

Оценка погрешности метода проекционной регуляризации

Рассмотрим приближенное решение (18) задачи (17). В качестве характеристики точности приближенного решения (18) рассмотрим величину

$$\Delta(\varepsilon, \delta) = \sup\left\{\left\|G_\delta^\varepsilon - G\right\| : Z \in \tilde{M}_r;\ \|Z - Z_\delta\| \le \delta\right\}.$$

Воспользуемся очевидной оценкой

$$\Delta(\varepsilon, \delta) \le \Delta_1(\varepsilon) + \Delta_2(\varepsilon, \delta),$$

где

$$\Delta_1(\varepsilon) = \sup\{\left\|G^\varepsilon - G\right\|:\ G \in \tilde{M}_r\},\ \ G^\varepsilon = A_\varepsilon Z,\ \ \Delta_2(\varepsilon, \delta) = \sup\{\left\|G_\delta^\varepsilon - G^\varepsilon\right\| : \|Z - Z_\delta\| \le \delta\}.$$

Оценим величины $\Delta_1(\varepsilon)$, $\Delta_2(\varepsilon, \delta)$.

Для величины $\Delta_2(\varepsilon, \delta)$ имеем очевидную оценку $\Delta_2(\varepsilon, \delta) \le \delta\|A_\varepsilon\|$, где

$$\|A_\alpha\| = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \mathrm{sp}(B_\varepsilon),\ \lambda \ge 0\},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \psi(1,\lambda) & \varphi(1,\lambda) \\ \psi_x(1,\lambda) & \psi_x(1,\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\psi}(1,\lambda) & \overline{\varphi}_x(1,\lambda) \\ \overline{\varphi}(1,\lambda) & \overline{\psi}_x(1,\lambda) \end{pmatrix} e^{-2\varepsilon\lambda}.$$

Далее,

$$\|A_\alpha\| \le \|B_1\| + \|B_2\|,$$

где

$$B_1=\begin{pmatrix}\psi(1,\lambda) & \varphi(1,\lambda)\\ 0 & 0\end{pmatrix}e^{-\varepsilon\lambda},\ B_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \psi_x(1,\lambda) & \varphi_x(1,\lambda)\end{pmatrix}e^{-\varepsilon\lambda}.$$

Зафиксируем $\lambda_0\geq 0$. Рассмотрим матрицу

$$C_1(\lambda_0)=\begin{pmatrix}|\psi(1,\lambda_0)|^2 & \bar{\varphi}(1,\lambda_0)\psi(1,\lambda_0)\\ \varphi(1,\lambda_0)\bar{\psi}(1,\lambda_0) & |\varphi(1,\lambda_0)|^2\end{pmatrix}e^{-2\varepsilon\lambda}.$$

Максимальное собственное значение матрицы C_1 имеет вид

$$y=(|\varphi|^2(1,\lambda)+|\psi|^2(1,\lambda))e^{-\varepsilon\lambda}.$$

Следовательно,

$$\|B_1\|\leq\sup_{\lambda_0\leq\alpha}\sqrt{|\varphi|^2(1,\lambda)+|\psi|^2(1,\lambda)}e^{-\varepsilon\lambda}.$$

Из последнего неравенства и теоремы 1 следует существование постоянной β_1 такой, что

$$\|B_1\|\leq\beta_1 e^{\frac{1}{2\varepsilon}}.$$

Аналогично, максимальное собственное значение матрицы

$$C_2(\lambda_0)=\begin{pmatrix}|\psi_x(1,\lambda_0)|^2 & \bar{\varphi}_x(1,\lambda_0)\psi_x(1,\lambda_0)\\ \varphi_x(1,\lambda_0)\bar{\psi}_x(1,\lambda_0) & |\varphi_x(1,\lambda)|^2\end{pmatrix}e^{-2\varepsilon\lambda}$$

имеет вид

$$y=(|\varphi_x(1,\lambda)|^2+|\psi_x(1,\lambda)|^2)e^{-2\varepsilon\lambda}.$$

Следовательно,

$$\|B_2\|\leq\sup_{\lambda_0\leq\alpha}\sqrt{|\varphi_x(1,\lambda)|^2+|\psi_x(1,\lambda)|^2}e^{-\varepsilon\lambda}.$$

Из последнего неравенства и теоремы 1 следует существование постоянной β_2 такой, что

$$\|B_2\|\leq\beta_2 e^{\frac{1}{2\varepsilon}}.$$

Из неравенств (19) и (20) следует существование постоянной $\beta>0$ такой, что

$$\Delta_2(\varepsilon,\delta)\leq\beta\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon}}. \tag{20}$$

Оценка для величины $\Delta_1(\varepsilon)$ имеет вид

$$\Delta_1(\varepsilon)\leq\sup\{\|(A_\varepsilon-A)A^{-1}G\|:G\in M_r\}\leq r\sup_{\lambda\geq 0}\frac{1-e^{-\varepsilon\lambda}}{\lambda}\leq r\varepsilon. \tag{21}$$

Замечание. Оценивая снизу величины $\Delta_1(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon,\delta)$, можно убедиться, что оценки (20) и (21) являются точными по порядку.
Выбирая зависимость $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$ из условия

$$\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon}}=r\varepsilon$$

(квазиоптимальный выбор параметра регуляризации [4]), получаем, что оценка погрешности приближенного решения (18) на множестве $\tilde{M}_r$ имеет вид

$$\Delta(\varepsilon(\delta),\delta)\leq\frac{C_5}{\ln(1/\delta)}. \tag{22}$$

Из замечания следует, что оценка (22) является точной по порядку.

В силу изометричности преобразования Фурье из оценки (21) с учетом оценки погрешности приближенного решения задачи (17) следует

теорема 2. При сформулированных выше условиях существуют постоянные $\delta_0; C_6; C_7$ такие, что для любого $\delta \in (0, \delta_0)$ справедливы оценки погрешности метода проекционной регуляризации на множестве M_r:

$$\frac{C_7}{\ln(1/\delta)} \le \Delta(\varepsilon(\delta), \delta) \le \frac{C_6}{\ln(1/\delta)}.$$

Апостериорный выбор параметра регуляризации

Для выбора параметра регуляризации на практике может быть использована следующая схема, не использующая явно априорную информацию о точном решении поставленной обратной задачи (ср. [7]).

Пусть параметр регуляризации выбирается из конечного множества

$$\Lambda_N = \{\varepsilon_i : 0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_N\}.$$

Обозначим через $G_{\varepsilon_i}^{\delta} = R_{\varepsilon_i} Z_\delta$ соответствующие приближенные решения. Пусть G – точное решение задачи (17), $G \in \tilde{M}_r$. Обозначим через ε_{opt} квазиоптимальное значение параметра регуляризации, полученное по схеме М.М. Лаврентьева. Обозначим через ε^* оптимальное значение параметра регуляризации, выбираемое из множества Λ_N, т.е.

$$\varepsilon^* = \max\{\varepsilon_i : \varepsilon_i \in M(\Lambda_N)\},$$

где

$$M(\Lambda_N) = \left\{ \varepsilon_i \in \Lambda_N : r\varepsilon_i \le \delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_i}} \right\}.$$

Пусть $M(\Lambda_N) \ne \varnothing$; $\Delta_N \setminus M(\Lambda_N) \ne \varnothing$.

Наряду с $M(\Lambda_N)$ рассмотрим множество

$$M^+(\Lambda_N) = \left\{ \varepsilon_i \in \Lambda_N : \left\| G_{\varepsilon_i}^{\delta} - G_{\varepsilon_j}^{\delta} \right\| \le 4\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_j}} \ (j = 0, 1, \ldots, i) \right\}.$$

Лемма 2. $M(\Lambda_N) \subseteq M^+(\Lambda_N)$.

Доказательство. Рассмотрим значения параметра регуляризации $\varepsilon_i, \varepsilon_j \in \Lambda_N$; $\varepsilon_i \in M(\Lambda_N)$, $j < i$. Имеем неравенство

$$\left\| G_{\varepsilon_i}^{\delta} - G_{\varepsilon_j}^{\delta} \right\| \le \left\| G_{\varepsilon_i}^{\delta} - G \right\| + \left\| G - G_{\varepsilon_j}^{\delta} \right\| + \left\| G_{\varepsilon_i} - G_{\varepsilon_j}^{\delta} \right\| \le \delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_i}} + \delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_j}} + r\varepsilon_i + r\varepsilon_j \le 4\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_j}}.$$

Следовательно, $\varepsilon_i \in M^+(\Lambda_N)$.

Обоснование одного из правил апостериорного выбора параметра регуляризации дает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть параметр регуляризации выбран из условия

$$\varepsilon^+ = \max\left\{ \varepsilon_i : \varepsilon_i \in M^+(\Lambda_N) \right\}.$$

Тогда

$$\Delta(\varepsilon^+(\delta), \delta) = \sup\left\{ \left\| G_\delta^\varepsilon - G \right\| : G \in \tilde{M}_r; \left\| Z - Z_\delta \right\| \le \delta \right\} \le \frac{6C_5}{\ln(1/\delta)}.$$

Доказательство. Из определения $\varepsilon^* = \varepsilon_l$ следует, что для ε_{l+1} выполняется неравенство

$$\frac{r\varepsilon_{l+1}}{e^{\frac{1}{2\varepsilon_{l+1}}}} \ge \delta = \frac{r\varepsilon_{opt}}{e^{\frac{1}{2\varepsilon_{opt}}}}.$$

Следовательно, в силу монотонности функции $s(x) = \frac{rx}{e^{\frac{1}{2x}}}$ на промежутке $x \in (0, \infty)$, $\varepsilon_{l+1} \ge \varepsilon_{opt}$ и

$$\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_{i+1}}} \le \delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_{opt}}} .$$

В силу леммы 2, так как $M(\Lambda_N) \subseteq M^+(\Lambda_N)$,

$$\varepsilon^* = \varepsilon_l = \max\{\varepsilon_i : \varepsilon_i \in M(\Lambda_N)\} \le \varepsilon^+ = \max\left\{\varepsilon_i : \varepsilon_i \in M^+(\Lambda_N)\right\}.$$

Из определения $M^+(\Lambda_N)$ следует

$$\Delta(\varepsilon^+(\delta),\delta) = \sup\left\{\left\|G_\delta^{\varepsilon^+} - G\right\| : G \in \tilde{M}_r;\ \|Z - Z_\delta\| \le \delta\right\} \le$$

$$\le \sup\left\{\left\|G_\delta^{\varepsilon^+} - G_\delta^{\varepsilon^*}\right\| : Z \in \tilde{M}_r;\ \|Z - Z_\delta\| \le \delta\right\} + \sup\left\{\left\|G_\delta^{\varepsilon^*} - G\right\| : G \in \tilde{M}_r;\ \|Z - Z_\delta\| \le \delta\right\} \le$$

$$\le 4\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_l}} + \delta e^{\frac{1}{2\varepsilon^*}} + r\varepsilon^* \le 6\Delta(\varepsilon_{opt}(\delta),\delta) \le \frac{6C_5}{\ln(1/\delta)}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. - Новосибирск: Наука, 1962. - 92 с.
2. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения / В.П. Танана // Докл. РАН. - 2006. - Т. 407, № 3. - С. 316-318.
3. Ильин, А.М. Уравнения математической физики / А.М. Ильин. - Челябинск: Изд-во ЧелГУ, 2005. - 171 с.
4. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. - М.: Наука, 1995. - 175 с.
5. Танана, В.П. Об одном подходе к приближению разрывного решения некорректно поставленной задачи / В.П. Танана, Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2005.-Т. 8, № 1(21).-С. 129-142.
6. Владимиров, B.C. Уравнения математической физики / B.C. Владимиров. - М.: Наука, 1971.-512 с.
7. Pereverzev, S. On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems / S. Pereverzev, E. Schock //SIAM J.Numer.Anal. - 2005. - V. 43, № 5. - P. 2060-2076.
8. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - М.: Наука, 1989. - 496 с.
9. Виленкин, Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н.Я. Виленкин. М.: Наука, 1965. - 588 с.
10. Дьедоне, Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне. - М.: Мир, 1964. - 430 с.

Поступила в редакцию 20 апреля 2010 г.

ABOUT SOLVING ONE BOUNDARY INVERSE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION

The problem of restoration of boundary conditions of the third genre using additional information about decision of the parabolic equation is considered. The method of the approached solution of the set problem with a choice of parameter of regularization using M.M. Lavrenteva's scheme [1] and one of schemes of a posteriori choice of regularization parameter is considered. The exact in order estimation of error of the constructed approximate answer based on one of the classes of the uniform regularization is received.

Keywords: inverse problem, approximate answer method, error estimation.

Tabarintseva Elena Vladimirovna is Cand.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Functional Analysis Department, South Ural State University.

Табаринцева Елена Владимировна - кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра функционального анализа, механико-математический факультет, Южно-Уральский государственный университет.

e-mail: eltab@rambler.ru