

# ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ОСТРОУГОЛЬНОМ КЛИНЕ

**Х.Б. Толипов**

Рассматривается теоретическая модель распространения поверхностной волны в остроугольном клине. При этом неизвестные параметры в акустических уравнениях раскрываются на основе приближенного решения уравнений движения и граничных условий. Полученное решение позволяет в рамках акустики выявить новые особенности, характерные при распространении этих волн в клине.

*Ключевые слова:* клиновидная среда, неоднородная волна, дифракция, волновое поле, теория упругости.

## Введение

Известно [1], что по своей структуре волна Рэлея представляет неоднородную волну, в которой смещения затухают по мере удаления от поверхности, по которой распространяется волна. При этом пространственная структура и параметры волны в процессе движения остаются неизменными.

Совершенно иной характер распространения этой волны в клиновидной среде. При движении волны Рэлея по поверхности одной грани клина в направлении ребра при углах раствора  $\alpha < 90^\circ$  происходит изменение как амплитуды, так и скорости падающей акустической волны.

Причина этого феномена кроется в том, что при движении волны изменяются условия распространения: смещения волны в какой-то момент времени начинают достигать противоположной грани клина. Взаимодействие с поверхностью этой грани клина обуславливает расщепление волны на независимые поверхностную и объемную компоненты [2]. Энергия распространяющейся волны начинает уменьшаться, так как объемные волны, оттекающие с поверхности в глубь среды, уносят с собой часть энергии.

Так же изменяется структура волны: при взаимодействии с поверхностями обеих граней клина происходит расщепление исходной волны Рэлея на независимые симметричную и антисимметричную моды.

Следовательно, при распространении волны Рэлея в клине в некоторой области, прилегающей к ребру, имеет место потеря ее устойчивости (стационарности). При этом возникает особый тип поверхностной волны, сопровождающийся в ходе движения непрерывной перестройкой акустического поля и излучением объемных волн.

Рассмотрим в рамках плосковолновой модели для изотропного твердого тела подход, позволяющий определить параметры волны.

Малые возмущения, распространяющиеся вдоль поверхности и состоящие из продольных и поперечных акустических волн, можно найти из стандартных уравнений акустики:

$$\Delta U_\ell + k_\ell^2 U_\ell = 0, \quad \Delta U_t + k_t^2 U_t = 0. \quad (1)$$

Введение продольного и поперечного потенциалов, связанных со смещениями  $U_\ell$  в продольных и  $U_t$  в поперечных волнах соотношениями  $U_\ell = \text{grad } \Phi, U_t = \text{rot } \Psi$ , позволяющее перейти от векторных уравнений к скалярным, преобразует систему (1) к виду:

$$\Delta \Phi + k_\ell^2 \Phi = 0, \quad \Delta \Psi + k_t^2 \Psi = 0. \quad (2)$$

В двумерной геометрии потенциалы зависят только от двух пространственных координат  $x$ ,  $z$  и от времени  $t$  и решение (2) разыскиваем в виде:

$$\begin{aligned} \Phi &= A \exp(ik_r x - i\omega t + iq_r z), \\ \Psi &= Ap \exp(ik_r x - i\omega t + is_r z). \end{aligned} \quad (3)$$

В выражениях (3) величины  $q_r, s_r$ , имеющие смысл коэффициентов амплитудного спадания смещений с удалением от границы, определяются равенствами:

$$q_r = \sqrt{k_r^2 - k_\ell^2}, \quad s_r = \sqrt{k_r^2 - k_t^2},$$

а коэффициент  $p$ , выражающий связь между потенциалами соотношением:

$$p = -i\sqrt{q_r / s_r}.$$

В этих формулах  $k_t, k_\ell, k_r$  – соответственно волновые числа продольных, поперечных и искомых волн,  $\omega$  – круговая частота.

Амплитуда смещений  $A$  задается источником возбуждения и считается величиной известной, а определяемым параметром является волновое число  $k_r$ . Для его нахождения дополнительно используются стандартные граничные условия [1].

В классическом случае скорость волны, определяемой из соотношения  $V = \omega / k_r$ , и начальная амплитуда смещений  $A$  являются величинами конечными и неизменными в ходе движения волны.

Для клиновидной среды ситуация совершенно другая. В ходе движения изменяются с координатой волновое число и амплитуда смещений, зависимости которых неизвестны, и решить уравнения (2) для функций  $\Phi$  и  $\Psi$  не представляется возможным. Однако при медленном изменении этих величин в пределах локальной длины волны можно воспользоваться приближенными методами. На малых интервалах изменения  $x$  и  $t$  возмущения общего вида можно рассматривать как состоящие из элементарных решений, зависимости которых имеют вид:

$$\Phi(x) = A_0 \exp[ik(x) - \omega t], \quad \Psi(x) = A_0 p \exp[ik(x) - \omega t].$$

Волновое число в этих соотношениях выражается в комплексном виде:  $k(x) = k_1(x) + ik_2(x)$ , где действительная часть этого числа характеризует скорость волны  $V(x) = \omega / k_1(x)$ , а мнимая – амплитуду  $A(x) = A_0 \exp[-k_2(x)]$ .

### Постановка задачи

Рассмотрим теоретическую модель распространения волны Рэлея из бесконечности к ребру клина. Для расчета параметров волны воспользуемся цилиндрической системой координат (рис. 1), которая приводит уравнения (2) к виду:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + k_\ell^2 \Phi = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + k_t^2 \Psi = 0,$$

(4)

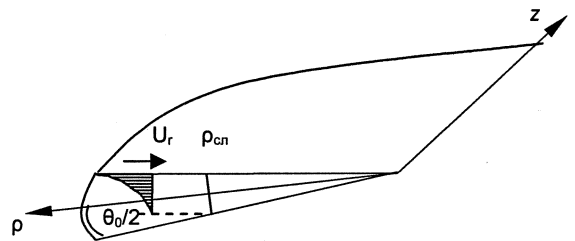


Рис. 1. Система координат ( $U_r$  – падающая волна)

и дополним стандартными граничными условиями, выражающими отсутствие напряжений на поверхностях клина:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\rho\theta} = 0, \text{ при } \theta = \pm\theta_0, \theta = 2\alpha. \tag{5}$$

Решения (4) целесообразно искать в виде комбинаций функции Ханкеля первого рода:

$$\begin{aligned} \Phi &= A_0 H_{\nu_1}^{(1)}(k_\ell \rho) \cos(\nu_1 \theta) + C_0 H_{\nu_1}^{(1)}(k_\ell \rho) \sin(\nu_1 \theta), \\ \Psi &= A_1 H_{\nu_2}^{(1)}(k_t \rho) \sin(\nu_2 \theta) + C_1 H_{\nu_2}^{(1)}(k_t \rho) \cos(\nu_2 \theta), \end{aligned} \tag{6}$$

поскольку эти функции удовлетворяют условию погашаемости, т.е. обращаются в нуль при бесконечном значении комплексного аргумента.

В этих формулах  $\nu_1, \nu_2$  – угловые волновые числа, которые предполагаем медленно изменяющимися на локальной длине волны.

Как известно [3], компоненты тензора напряжений в криволинейной системе координат имеют вид:

$$\sigma_{\rho\theta} = \mu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial \rho} - \frac{U_\theta}{\rho} \right), \tag{7}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \left( \frac{U_\rho}{\rho} + \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + 2\mu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_\rho}{\rho} \right).$$

Если использовать связь смещений с потенциалами:

$$U_\rho = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad U_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad (8)$$

то соотношение (7) в терминах волновых потенциалов можно переписать в виде:

$$\sigma_{\rho\theta} = \mu \left( \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu \left[ -\frac{k_t^2}{2} \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (9)$$

Подстановка выражений (6) в граничные условия (5) приводит к системе однородных алгебраических уравнений. С учетом соотношений для цилиндрических функций [4]:

$$2\nu Z_\nu(z) = zZ_{\nu-1} - zZ_{\nu+1}, \quad 2Z'_\nu(z) = -Z_{\nu-1} - Z_{\nu+1}$$

определители полученной системы уравнений принимают компактный вид:

$$\frac{H_{\nu_1}^+ - 2 \left( \frac{k_t^2}{k_\ell^2} - 1 \right) H_{\nu_1}(k_\ell \rho)}{H_{\nu_1}^- H_{\nu_2}^-} H_{\nu_2}^+ - \left[ \frac{\text{th } \nu_2 \theta}{\text{th } \nu_1 \theta} \right]^m = 0, \quad (10)$$

$$H_{\nu_j}^\pm(x_j) = H_{\nu_j-2}^{(1)}(x_j) \pm H_{\nu_j+2}^{(1)}(x_j), \quad j=1,2, \quad x_1 = k_\ell \rho, \quad x_2 = k_t \rho, \quad m = \pm 1$$

и имеют смысл дисперсионных соотношений для симметричной ( $m=1$ ) и антисимметричной ( $m=-1$ ) мод поверхностной волны. Штрихами в этих формулах помечены производные по координате цилиндрических функций.

Для решения полученных комплексных дисперсионных уравнений применим для функций Ханкеля асимптотические выражения Лангера [4], которые при произвольном  $\nu \gg 1$  дают в интервале  $0 < z < \infty$  равномерные представления:

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\lambda} e^{-i\frac{2\pi}{3}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(i\nu\omega\lambda), \quad (11)$$

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{z^2}{\nu^2}}; \quad \lambda = \frac{1}{\omega} \text{Artn}(\omega) - 1$$

и далее, используя (11) и известную асимптотику Ханкеля [4]:

$$H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[ -i \left( z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

окончательно получаем:

$$H_{\nu_1}^{(1)}(k_\ell \rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \exp \left[ -ik\rho - i\nu_1 \text{Artn} \left( \frac{\nu_1}{k\rho} \right) \right],$$

$$H_{\nu_2}^{(1)}(k_t \rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \exp \left[ -ik\rho - i\nu_2 \text{Artn} \left( \frac{\nu_2}{k\rho} \right) \right], \quad (12)$$

$$\frac{\nu_1}{\rho} = \sqrt{k^2 + k_\ell^2}, \quad \frac{\nu_2}{\rho} = \sqrt{k^2 + k_t^2}.$$

Расчет показал, что решение этой задачи существует только при комплексных значениях вектора  $k$ . Следовательно, для удовлетворения условия отсутствия напряжений на поверхностях граней клина, волновой вектор  $k$  должен принимать комплексные значения, что соответствует физическим представлениям. В предельном случае  $\rho \rightarrow \infty$  получается асимптотическое решение Рэлея, согласующееся с экспериментальными наблюдениями. Поскольку при больших значениях

пространственных координат исчезает влияние противоположной грани клина, поэтому в процессе распространения структура и параметры волны Рэлея не изменяются.

Кривые дисперсии фазовой скорости, рассчитанные по формуле (10), представлены на рис. 2.

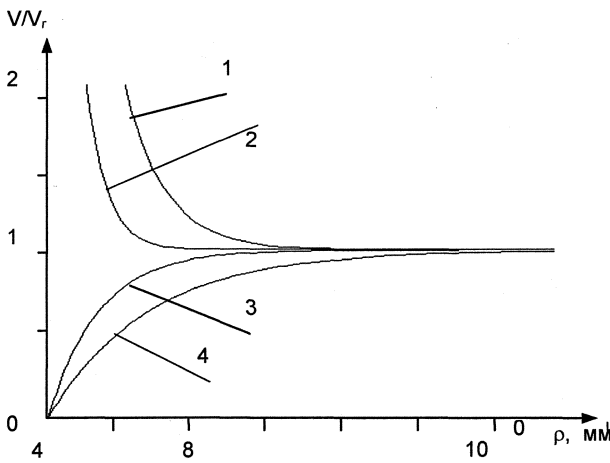


Рис. 2. Зависимость относительной скорости волн от расстояния до ребра для симметричных (1 и 2) и антисимметричных (3 и 4) мод. Углы клина: 1 и 4 -  $\theta_0 = 4,5^\circ$ ; 2 и 3 -  $\theta_0 = 5,7^\circ$

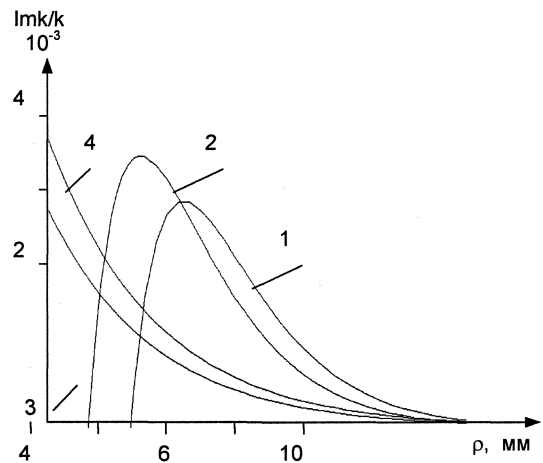


Рис. 3. Зависимость коэффициента затухания волн от расстояния до ребра для тех же углов клина

Отметим здесь особый характер пространственных зависимостей скоростей этих мод. С приближением к ребру до точки  $\rho_{сл}$  имеем устойчивое стационарное распространение поверхностной волны, а после этой точки происходит потеря устойчивости, сопровождающаяся возникновением двух мод. При этом оказывается, что скорости распространения этих мод при приближении к ребру будут изменяться различным образом. Скорость симметричной моды стремится к скорости продольной волны, а антисимметричной - к нулю. Схожая картина наблюдается в плоскопараллельной пластине при монотонно уменьшающейся толщине [1].

Как было выяснено в полученном решении, волновой вектор состоит из двух слагаемых:  $\kappa = \kappa_1 + i\kappa_2$ . Следовательно, множитель  $\exp(-\kappa_2 \rho)$  в соотношении (12) определяет затухающие возмущения, связанные с оттоком энергии при возникновении объемных волн. Коэффициенты затуханий волн монотонно возрастают с приближением к ребру (рис. 3).

Рассмотренные выше особенности возникают в области, протяженность которой очень резко зависит от угла раствора клина (рис. 4). Так, например, при изменении угла от  $5^\circ$  до  $25^\circ$  эта область сокращается в 10 раз.

## Выводы

Анализ акустических характеристик поверхностной волны в клине, проведенных в рамках классического подхода, приводит к выводу о том, что исследования выявили особый тип поверхностных волн, сопровождающийся в ходе движения непрерывной перестройкой акустического поля. Отметим также, что представленная модель позволяет понять физические процессы, происходящие при распространении поверхностной волны в остроугольном клине.

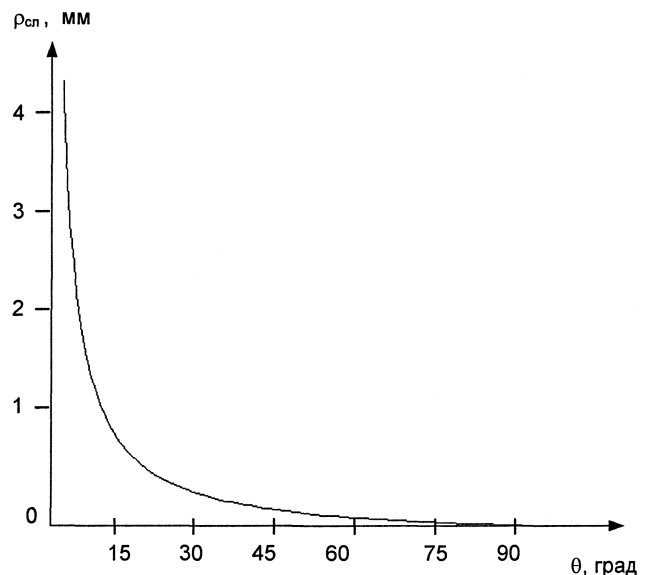


Рис. 4. Зависимость протяженности области неустойчивого распространения волны от угла клина

Литература

1. Викторов, И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И.А. Викторов. - М.: Наука. - 1966. - 165 с.
2. Гуревич, С.Ю. Особенности дифракции поверхностных волн на ребре клине / С.Ю. Гуревич, Х.Б. Толипов // ПМТФ. - 2003. - № 5. - С. 161-168.
3. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий.- М.: Мир, 1975. - 872 с.
4. Янке, Е. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. - М.: Наука, 1977.-С 225.

*Поступила в редакцию 10 января 2009 г.*

## **CHANGE OF STRUCTURE OF A SUPERFICIAL WAVE AT DISTRIBUTION TO AN ACUTE-ANGLED WEDGE**

The theoretical model of distribution of a surface wave in an acute-angled wedge is considered. Thus unknown parameters in the acoustic equations reveal on the basis of the approached decision of the equations of movement and boundary conditions. The received decision allows revealing within the limits of acoustics new features, characteristic at distribution of these waves to a wedge.

*Keywords: wedge-shaped medium, inhomogeneous wave, diffraction, wave's field, theory of elasticity.*

**Tolipov Khoris Borisovich** - Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, General and Experimental Physics Department, South Ural State University.

**Толипов Хорис Борисович** - кандидат технических наук, доцент, кафедра общей и экспериментальной физики, Южно-Уральский государственный университет.

e-mail: [thb@susu.ac.ru](mailto:thb@susu.ac.ru)