

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРУГА МОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОЛЯРНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

О.С. Садаков, А.О. Щербакова, С.И. Шульженко

Рассмотрена задача разделения несимметричного тензора дисторсии на симметричный (тензор коэффициентов длины) и ортогональный (тензор жесткого поворота) сомножители для случая, когда ортогональный тензор характеризуется одним числом. Рассмотренный случай характеризует плоское деформированное (или напряженное) состояние и является весьма распространенным при решении краевой задачи деформирования твердого тела.

Ключевые слова: круг Мора, тензор дисторсии, тензор жесткого поворота, тензор коэффициентов длины, полярная декомпозиция.

Введение

Для решения краевой задачи деформирования твердого тела в геометрически нелинейной постановке возникает необходимость представить несимметричный тензор (тензор дисторсии) в виде произведения симметричного (тензор коэффициентов длины) и ортогонального (тензор жесткого поворота) сомножителей. Необходимость выделения тензора коэффициентов длины из тензора дисторсии определяется тем, что именно он связан физическим законом с тензором напряжений в данном элементе. Эту задачу обычно называют задачей факторизации и решают с помощью операции извлечения квадратного корня из симметричного тензора, что требует нахождения собственных значений последнего [1-4]. Однако в частном, но весьма типичном случае плоской задачи, когда ортогональный тензор характеризуется одним числом, эта задача может быть существенно упрощена. Ее решение иллюстрирует круг Мора, обобщенный на несимметричные тензоры.

Составляющие дисторсии

При решении задачи о плоском деформировании тензор дисторсии F , определяющий деформирование и поворот волокон в малой окрестности точки тела путем скалярного произведения

$$dr = F \cdot dx \quad (1)$$

(dx - вектор, характеризующий начальное состояние некоторого элементарного волокна, dr - вектор, характеризующий положение того же волокна в деформированном состоянии), представляет сумму четырех диад

$$F = F_{ij}e_i e_j, \quad i, j = 1, 2.$$

Для удобства используем декартову систему координат с правым базисом $\{e_i\}$.

Если тензор F симметричен, то его называют тензором коэффициентов длины и обозначают V или U . Его главные значения представляют суммы

$$1 + \varepsilon_1 \equiv k_1, \quad 1 + \varepsilon_2 \equiv k_2,$$

называемые главными коэффициентами длины (здесь ε_1 и ε_2 - главные деформации). Если тензор F ортогонален, то рассматриваемый элемент объема (точнее, плоскости) не деформируется, а лишь поворачивается как жесткое целое на некоторый угол φ . В этом случае его обозначают R и называют тензором жесткого поворота:

$$R = (e_1 e_1 + e_2 e_2) \cos \varphi + (e_2 e_1 - e_1 e_2) \sin \varphi, \quad (2)$$

φ - угол поворота против часовой стрелки.

В общем случае плоского деформирования тензор дисторсии записывают в виде скалярного произведения $V^* R$ или $R^* U$ в зависимости от желания представить преобразование (1) в виде поворота элемента площади с последующим деформированием или наоборот - деформирования с последующим поворотом. Тензор R в этих двух случаях одинаков, а тензоры коэффициентов длины отличаются друг от друга и их называют левым (V) или правым (U) тензорами коэффициентов длины.

Круг Мора для дисторсии

Ввиду линейности преобразования (1) при анализе деформации можно исключить из рассмотрения абсолютную длину волокон, отнеся векторы dr и dx к длине последнего (dx):

$$f = F \cdot n, \quad n \equiv \frac{dx}{dx}, \quad f \equiv \frac{dr}{dx}.$$

Вектор n является единичным; он характеризует начальное направление элементарного волокна (рис. 1). Это направление будем определять углом α по отношению к вектору e_1 .

$$n = e_1 \cos \alpha + e_2 \sin \alpha. \quad (3)$$

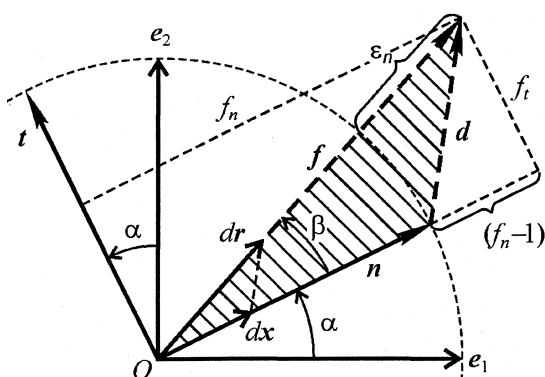


Рис. 1

Деформированное состояние этого волокна (вектор /на рис. 1) можно назвать вектором дисторсии - по аналогии с вектором напряжения (в форме Коши), определяемого скалярным произведением тензора напряжений на нормаль n к площадке.

Разность длин векторов определяет деформацию этого волокна, угол β между ними - поворот волокна. В геометрически линейном подходе (с учетом гипотезы о бесконечной малости деформаций) соответствующую деформацию и поворот волокна n определяет разность векторов $d=f-n$ путем его проецирования на векторы n и ортогональный ему t

$$t = -e_1 \sin \alpha + e_2 \cos \alpha. \quad (4)$$

В нашем случае (строгий, геометрически нелинейный подход) деформация и поворот волокна n определяются выражениями (рис. 1):

$$\varepsilon_n = |f| - 1, \quad \beta = \arctg(f_i / f_n), \quad (5)$$

где

$$f_i = f \cdot t = F \cdot nt, \quad f_n = f \cdot n = F \cdot nn. \quad (6)$$

Из последних выражений, описывающих плоское деформированное состояние, следует закономерность, имеющая прямое отношение к кругу Мора. Проекции f_i и f_n , как следует из выражений (3, 4, 6), представляют следующие функции угла α :

$$f_n = F_{11} \cos^2 \alpha + (F_{12} + F_{21}) \sin \alpha \cos \alpha + F_{22} \sin^2 \alpha, \\ f_i = F_{21} \cos^2 \alpha + (F_{22} - F_{11}) \sin \alpha \cos \alpha - F_{12} \sin^2 \alpha.$$

С учетом того, что $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha) / 2$, $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha) / 2$, а $\sin \alpha \cos \alpha = (\sin 2\alpha) / 2$, эти выражения преобразуются к виду:

$$f_n = u_1 - b \cos 2\alpha + a \sin 2\alpha, \\ f_i = u_2 + a \cos 2\alpha + b \sin 2\alpha, \quad (7)$$

где

$$u_1 = \frac{F_{11} + F_{22}}{2}, \quad a = \frac{F_{12} + F_{21}}{2}, \\ u_2 = \frac{F_{21} - F_{12}}{2}, \quad b = \frac{F_{22} - F_{11}}{2}.$$

Покажем, что полученные выражения соответствуют уравнению окружности. Как известно, окружность радиусом r в осях x и y (рис. 2, а), описывается выражениями:

$$x = r \cos \xi, \quad y = r \sin \xi.$$

Если принять

$$\xi = \psi_0 - 2\alpha,$$

где ψ_0 - константа, а угол α характеризует положение волокна n , то с учетом выражений

$$\cos(\psi_0 - 2\alpha) = \cos \psi_0 \cos 2\alpha + \sin \psi_0 \sin 2\alpha, \\ \sin(\psi_0 - 2\alpha) = \sin \psi_0 \cos 2\alpha - \cos \psi_0 \sin 2\alpha$$

получим

$$x = r \cos \psi_0 \cos 2\alpha + r \sin \psi_0 \sin 2\alpha, \quad y = r \sin \psi_0 \cos 2\alpha - r \cos \psi_0 \sin 2\alpha.$$

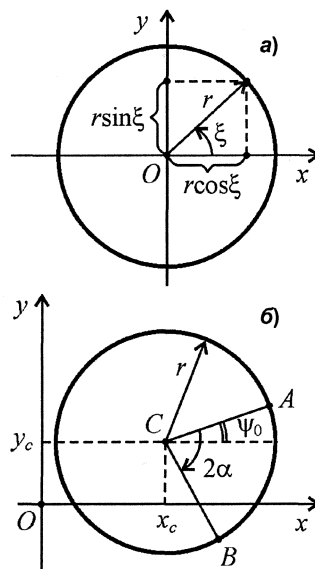


Рис. 2

Эти выражения соответствуют выражениям (7), если сместить центр круга в точку с координатами $x_C = u_1, y_C = u_2$ (рис. 2, б) и принять $r \cos \psi_0 = -b, r \sin \psi_0 = a$.

Таким образом, множество связанных между собой проекций f_i и f_n отображается на плоскости кругом радиусом r с центром в точке C с координатами f_{nC}, f_{iC} :

$$r = \sqrt{(F_{12} + F_{21})^2 + (F_{11} - F_{22})^2}, \quad f_{nC} = \frac{F_{11} + F_{22}}{2}, \quad f_{iC} = \frac{F_{21} - F_{12}}{2}. \quad (8)$$

Если множество треугольников $\{n, f, d\}$ (рис. 1) для разных углов α повернуть на соответствующие углы α по часовой стрелке в положение $\{n^*, f^*, d^*\}$ и совместить равными сторонами n^* , как показано на рис. 3, то несовпадающие вершины треугольников опишут окружность. Заметим, что если тензор F симметричен, то

$$f_{ic} = \frac{F_{21} - F_{12}}{2} = 0$$

и этот круг представляет привычный круг Мора для произвольно больших деформаций. Отметим также, что при возрастании угла α (при этом вектор n на рис. 1 поворачивается против часовой стрелки) отображающая точка на круге (координаты точки G на рис. 3) смещается по часовой стрелке. Кроме того, если угол между двумя волокнами n равен β , то центральный угол между соответствующими точками круга равен 2β (известное свойство круга Мора).

Факторизация

Изменения волокон dx связаны с деформацией и с дополнительным, общим для всех волокон, жестким поворотом, величина которого – угол φ , отсчитываемый против часовой стрелки, – характеризуется положением центра окружности C (рис. 4). Главным значениям ε_1 и ε_2 (и главным волокнам) отвечают точки A и B , лежащие на луче OC (ось u); значения соответствующих деформаций экстремальны, а поворот не имеет отношения к сдвигам: он связан лишь с жестким поворотом на угол φ всей окрестности. Превышение расстоянием OC единицы (отрезок O_1C) представляет среднюю деформацию ε_0 .

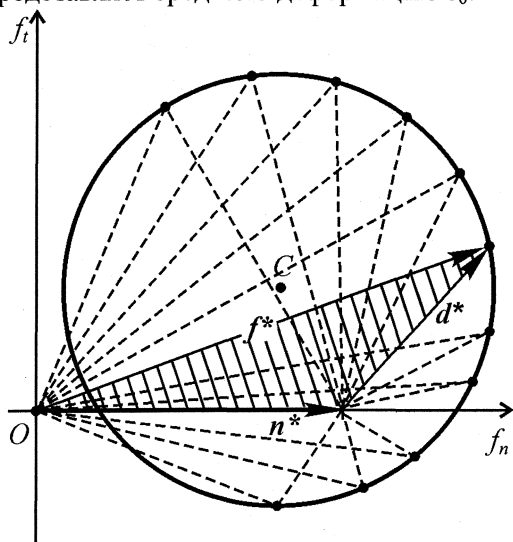


Рис. 3

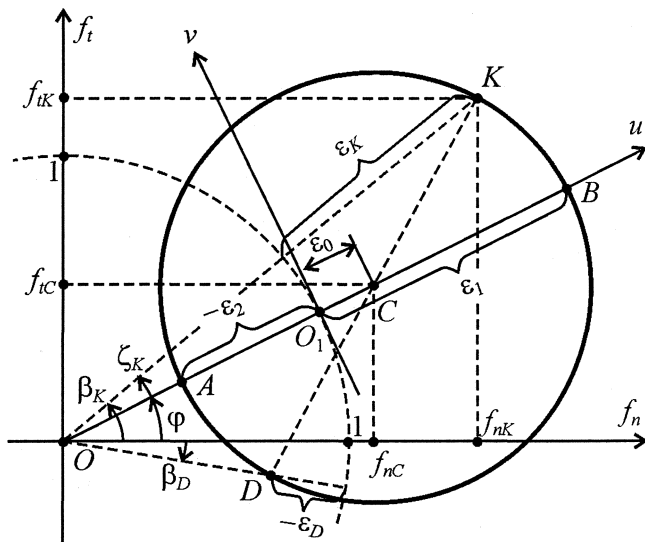


Рис. 4

Точка K на круге соответствует произвольно выбранному волокну; согласно выражению (7) его деформация равна ε_K , а поворот определяется углом $\beta_K = \arctg(f_{iK}/f_{nK})$. Поворот β_K представляет сумму

$$\beta_K = \varphi + \zeta_K,$$

где ζ_K – поворот, обусловленный деформацией. Деформация выражается через координаты u и v следующим образом:

$$\varepsilon_K = (u_K + 1)^2 + v_K^2 - 1.$$

Угол сдвига определяется изменением угла между двумя ортогональными волокнами. Отметим, что на круге центральный угол между точками, которые соответствуют этим волокнам, должен

быть в два раза больше, чем прямой угол между волокнами (свойство круга Мора). Например, угол сдвига пары ортогональных волокон, которые определяются на круге точками K и D , равен

$$\gamma = \beta_K - \beta_D = \arctg \frac{v_K}{1+u_K} - \arctg \frac{v_D}{1+u_D},$$

а максимальная деформация сдвига:

$$\gamma_{\max} = 2 \arctg \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2}.$$

Координаты центра круга f_{nC} и f_{iC} (8) позволяют определить угол жесткого поворота φ по координатам тензора F

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{21} - F_{12}}{F_{11} + F_{22}}. \quad (9)$$

Отметим, что выражение (9) также можно получить, рассмотрев в качестве волокон n базисные векторы e_1 и e_2 , которым отвечают векторы дисторсии соответственно $f_1 (OE_1)$ и $f_2 (OE_2)$, изображенные на рис. 5. Соответствующие проекции $\{f_n^{(1)}, f_i^{(1)}\}$ и $\{f_n^{(2)}, f_i^{(2)}\}$ векторов дисторсий определяются выражениями:

$$\begin{aligned} f_n^{(1)} &= (F \cdot e_1) \cdot e_1 = F_{11}, & f_i^{(1)} &= (F \cdot e_1) \cdot e_2 = F_{21}, \\ f_n^{(2)} &= (F \cdot e_2) \cdot e_2 = F_{22}, & f_i^{(2)} &= (F \cdot e_2) \cdot (-e_1) = -F_{12}. \end{aligned}$$

В последнем выражении знак «-» появляется вследствие того, что вектор e_2 повернут относительно e_1 на $\pi/2$ против часовой стрелки. Угол между отрезками CE_1 и CE_2 должен быть в два раза больше, чем прямой угол между векторами e_1 и e_2 , то есть он должен быть равен π , следовательно, отрезок E_1E_2 представляет диаметр круга с центром C посередине.

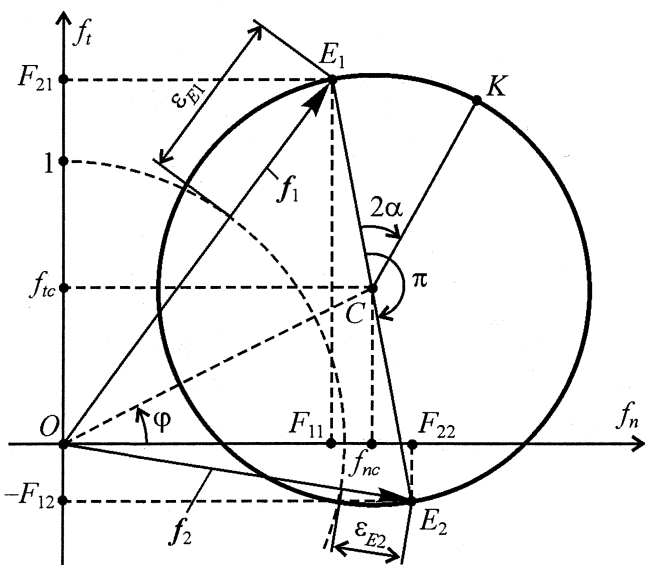


Рис. 5

Это позволяет найти и координаты центра круга и угол жесткого поворота φ . Отметим, что положение волокна, соответствующего точке K на круге (рис. 4, рис. 5), можно определить, повернув базисный вектор e_1 на угол α против часовой стрелки. Зная тангенс угла φ , найдем косинус и синус, входящие в выражение (2):

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi.$$

Задача факторизации для плоской деформации решается в следующей последовательности: сначала находится тензор R :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

а затем левый (V) или правый (U) тензор коэффициентов длины:

$$U = R^T \cdot F,$$

$$V = F \cdot R^T,$$

в этих выражениях учтено свойство ортогонального тензора $R^{-1} = R^T$.

Отметим, что рис. 4 (как и рис. 5) отвечает положительным значениям координат тензора дисторсии F_{ij} и углу жесткого поворота φ , разным знакам главных деформаций ε_1 и ε_2 , положительной средней деформации $\varepsilon_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$ и положительному изменению площади элемента. Коэффициент изменения площади фигуры $k_S = k_1 k_2$ (отношение текущей площади к начальной) может быть найден как модуль векторного произведения векторов f_1 и f_2 , поскольку начальная площадь равна $|e_1 \times e_2|$, то есть единице. Таким образом, с учетом координат точек E_1 и E_2 , указанных на рис. 5,

$$k_S = |f_1 \times f_2| = F_{22} F_{21} - F_{11} F_{12}.$$

Результаты

На рис. 6 показаны различные положения кругов Мора; оси u направлены от начала координат O в сторону соответствующих кругов и проходят через их центры, оси v перпендикулярны u

и касаются единичной окружности, углы φ отложены против часовой стрелки. Главные деформации, соответствующие кругу 1, положительны; на круге 3 - отрицательны; на круге 2 $\varepsilon_1 > 0$, а $\varepsilon_2 < 0$; на круге 4 $\varepsilon_1 > 0$, а $\varepsilon_2 = 0$. Отметим, что все указанные на рис. 6 положения кругов Мора имеют физический смысл.

В случае, когда начало координат $\{f_n; f_t\}$ находится внутри окружности (рис. 7, а), оказывается, что одна из главных деформаций (ε_2) отрицательна и больше единицы; это не имеет физического смысла, так как соответствует выворачиванию рассматриваемого элемента объема наизнанку. Также недопустима ситуация, когда окружность проходит через начало координат (рис. 7, б): одно из волокон сжимается до нулевой длины (точка О), что недопустимо даже для одного волокна: новая площадь обращается в ноль, тензор вырожден (его определитель равен нулю), а это не имеет физического смысла.

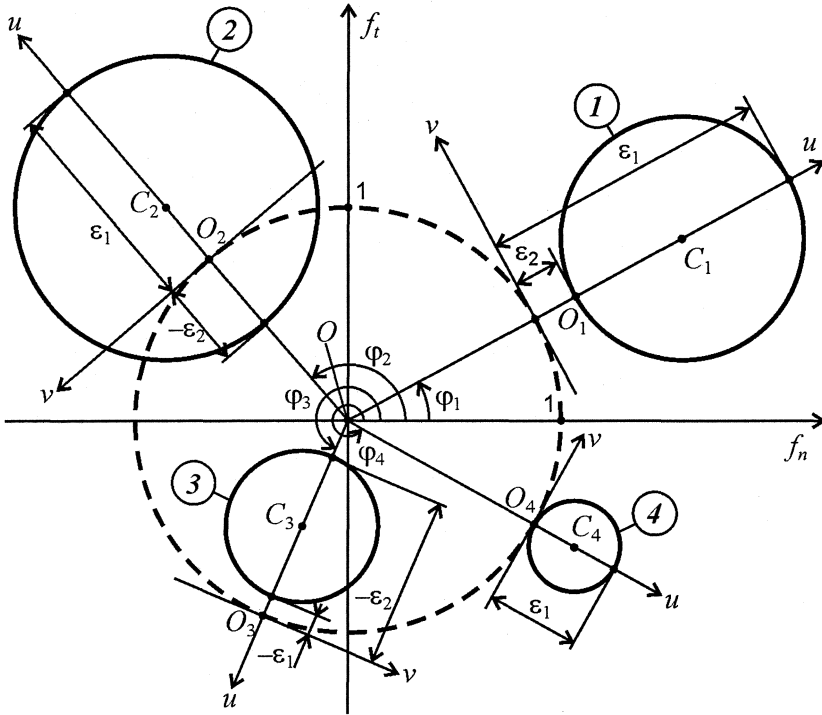


Рис. 6

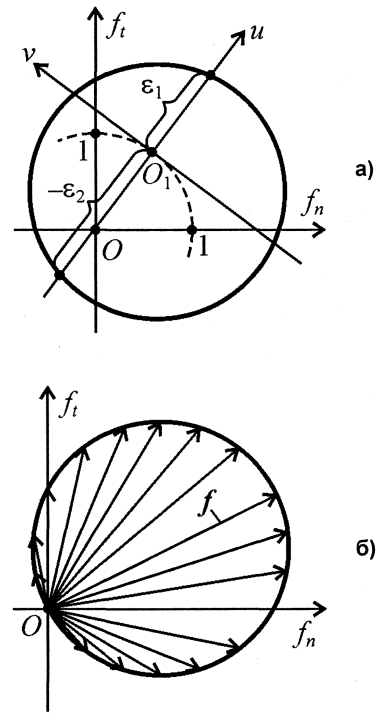


Рис. 7

В случае, когда $F_{11} = F_{22}$, а $F_{12} = -F_{21}$, круг Мора, согласно выражениям (17), превращается в точку (точка А на рис. 8) с координатами $f_{nA} = F_{11}$, $f_{tA} = F_{21}$. При заданной дисторсии сдвиговые деформации отсутствуют, а все линейные деформации (в плоскости) совпадают и являются главными; они равны $\varepsilon^A = k^A - 1$, где $k^A = \sqrt{F_{11}^2 + F_{21}^2}$. Угол поворота φ^A в соответствие с выражением (9) равен $\text{arctg}(F_{21}/F_{11})$. Этот случай соответствует сочетанию равномерного всестороннего растяжения (сжатия) и поворота. Частным случаем выбранного тензора F , может служить ортогональный тензор R (точка D на рис. 8), при этом дисторсия будет определяться только поворотом. Точка B с координатами $f_{nB} = F_{21}/(F_{11}^2 + F_{21}^2)$, $f_{tB} = -F_{11}/(F_{11}^2 + F_{21}^2)$ на рис. 8 соответствует тензору F^{-1} . В этом случае главные деформации $\varepsilon^B = 1/k^A - 1$, а угол поворота $\varphi^B = -\varphi^A$.

Если тензор F симметричен (сплошная линия на рис. 9), тогда центр круга Мора лежит на оси f_n в точке $f_n = (F_{11} + F_{22})/2$ и, следовательно, жесткий поворот отсутствует: $\varphi = 0$, $R = I$ (единичный тензор), а тензоры коэффициентов длины совпадают с тензором дисторсии $U = V = F$. Пунктирной линией на рис. 9 изображен круг Мора для обратного тензора.

Заключение

Полученные результаты позволяют утверждать, что рассмотренные свойства круга Мора для несимметричного тензора в случае двумерной задачи дают возможность найти угол жесткого поворота φ , с помощью которого определяется тензор жесткого поворота. Последний позволяет вычислить симметричный тензор коэффициентов длины.

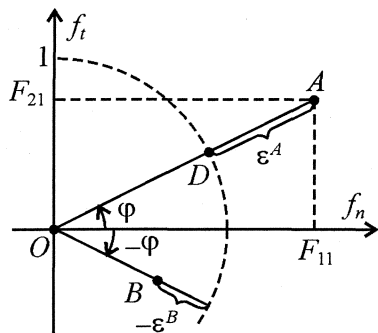


Рис. 8

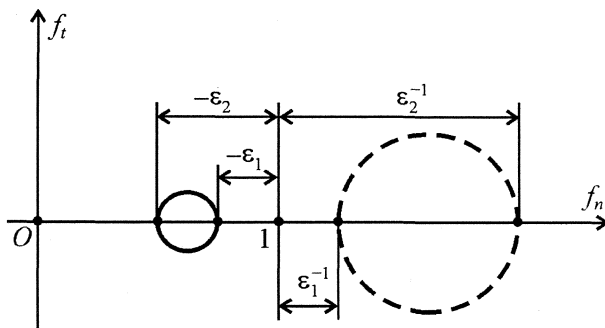


Рис. 9

Литература

1. Садаков, О.С. Использование круга Мора для расшифровки картин муаровых полос в случае больших смещений и деформаций / О.С. Садаков, СИ. Шульженко // Известия Челябинского научного центра. - 2005. - Вып. 4(30). - С. 56-60.
2. Belytschko, T. Nonlinear finite elements for continua and structures / T. Belytschko, W.K. Lin, B. Moran. - New York : John Wiley and sons, 2000.
3. Murph, G.J. C^* - Algebras and operator theory / G.J. Murph. - San Diego: Academic press, 1990.
4. Conway, J.B. A course in functional analysis. Graduate text in mathematics / J.B. Conway. - New York: Springer, 1990.

Поступила в редакцию 22 марта 2010 г.

APPLICATION OF THE MOHR CIRCLES FOR SOLVING THE PROBLEM OF POLAR DECOMPOSITION UNDER PLANE STRESS

The article considers the problem of separation of an asymmetric distortion tensor at the symmetric (stretch tensor) and the orthogonal (rigid body rotation tensor) factors for the case when orthogonal tensor is characterized by one number. This case describes plane strain (or stress) state and is very common when solving boundary problems of deformation of the solid.

Keywords: Mohr circle, deformation gradient, rigid body rotation tensor, stretch tensor, polar decomposition.

Sadakov Oleg Sergeevich - Dr. Sc. (Engineering), Professor of the Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Chair, Physics Department, South Ural State University.

Садаков Олег Сергеевич - доктор технических наук, профессор, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, физический факультет, Южно-Уральский государственный университет.

Scherbakova Alia Olegovna - Cand. Sc. (Engineering), Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Chair, Physics Department, South Ural State University

Щербакова Алла Олеговна - кандидат технических наук, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, физический факультет, Южно-Уральский государственный университет.

e-mail: AllaScherbakova@list.ru

Shulzhenko Sergey Ivanovich - Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor of Applied Mechanics, Dynamics and Strength of Machines Chair, Physics Department, South Ural State University

Шульженко Сергей Иванович - кандидат технических наук, доцент, кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин, физический факультет, Южно-Уральский государственный университет.