УДК 517.948

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНУЮ АПРИОРНУЮ ИНФОРМАЦИЮ

О. В. Григорьева

Во многих обратных задачах математической физики имеется дополнительная априорная информация о точном решении, которую необходимо использовать для качественного улучшения приближенного решения. В работе дано обобщение метода невязки, предложенного В.К. Ивановым в работе [1]. Метод невязки позволяет использовать дополнительную априорную информацию.

Ключевые слова: операторное уравнение, некорректно поставленная задача, гильбертово пространство, метод невязки.

I. Постановка задачи. Пусть U, F и V – гильбертовы пространства, A – инъективный линейный ограниченный оператор, отображающий U в F, а L – линейный замкнутый оператор с областью определения $D(L)\subset U$ и множеством значений $R(L)\subset V$, причем $\overline{D(L)}=U$. Обозначим через K выпуклое замкнутое множество из U и предположим, что $K\cap D(L)\neq\varnothing$. Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Au=f \tag{1}$$

и предположим, что при $f=f_0$ существует решение u_0 уравнения (1), которое принадлежит множеству $K\cap D(L)$, но точное значение f_0 нам не известно, а вместо него даны $f_\delta\in F$ и $\delta>0$ такие, что

$$\|f_\delta-f_0\|\le\delta. \tag{2}$$

Требуется, используя априорную информацию f_δ, δ, $D(L)$ и K, построить приближенное решение u_δ уравнения (1) и оценить его уклонение $\|u_\delta-u_0\|$ от точного решения u_0.

Метод решения поставленной задачи будет заключаться в сведении ее к вариационной задаче

$$\inf\left\{\|u\|^2+\|Lu\|^2 : u\in D(L)\cap K, \|Au-f_\delta\|\le\delta\right\}. \tag{3}$$

II. Обоснование метода (3).

Теорема 1. При любых значениях $\delta>0$ и $f_\delta\in F$ вариационная задача (3) разрешима.

Доказательство. Пусть $\Omega_\delta=\left\{u : u\in D(L)\cap K, \|Au-f_\delta\|\le\delta\right\}$. Тогда из того, что $u_0\in K\cap D(L)$ и соотношения (2) следует, что $\Omega_\delta\neq\varnothing$.

Таким образом, числовое множество $G_\delta=\left\{\|u\|^2+\|Lu\|^2 : u\in\Omega_\delta\right\}$ непустое и ограничено снизу числом 0. Если $\|f_\delta\|\le\delta$, то $\theta\in\Omega_\delta$ и является решением вариационной задачи (3). Если $\|f_\delta\|>\delta$, то из ограниченности снизу множества G_δ следует существование нижней грани $\inf\left\{\|u\|^2+\|Lu\|^2 : u\in D(L)\cap K, \|Au-f_\delta\|\le\delta\right\}$. Из определения нижней грани следует существование минимизирующей последовательности $\{u_n\}\subset\Omega_\delta$ такой, что

$$\|u_n\|^2+\|Lu_n\|^2\to\inf\left\{\|u\|^2+\|Lu\|^2 : u\in\Omega_\delta\right\}. \tag{4}$$

Из (4) следует ограниченность последовательностей $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$, а ввиду гильбертовости пространств U и V – их слабая предкомпактность.

Таким образом, существует подпоследовательность $\left\{u_{n_k}\right\}$ такая, что

$$u_{n_k} \xrightarrow{сл} \hat{u} \text{ при } k \to \infty, \tag{5}$$

а

$$Lu_{n_k} \xrightarrow{сл} \overline{v} \text{ при } k \to \infty. \tag{6}$$

Так как оператор L линеен и замкнут, то из (5) и (6) следует, что $\hat{u} \in K \cap D(L)$ и

$$\overline{v} = L\hat{u}. \tag{7}$$

Из линейности и ограниченности оператора A и соотношения (5) следует, что

$$Au_n \xrightarrow{сл} A\hat{u} \text{ при } k \to \infty, \tag{8}$$

а из (8), что

$$Au_{n_k} - f_\delta \xrightarrow{сл} A\hat{u} - f_\delta \text{ при } k \to \infty. \tag{9}$$

Из (9) по свойству нормы слабого предела имеем, что

$$\left\| A\hat{u} - f_\delta \right\| \le \varliminf_{k\to\infty} \left\| Au_{n_k} - f_\delta \right\|, \tag{10}$$

а из того, что для любого k $u_{n_k} \in \Omega_\delta$, а, следовательно, $\left\| Au_{n_k} - f_\delta \right\| \le \delta$, на основании (10) получим, что

$$\left\| A\hat{u} - f_\delta \right\| \le \delta. \tag{11}$$

Таким образом, учитывая соотношение (11) и то, что $\hat{u} \in K \cap D(L)$, получим

$$\hat{u} \in \Omega_\delta. \tag{12}$$

На основании свойства нормы слабого предела и соотношений (5)–(7) получим, что

$$\left\| \hat{u} \right\|^2 + \left\| L\hat{u} \right\|^2 \le \varliminf_{k\to\infty} \left\{ \left\| u_{n_k} \right\|^2 + \left\| Lu_{n_k} \right\|^2 \right\}. \tag{13}$$

Из соотношений (4), (12), (13) следует, что $\hat{u}$ является решением задачи (3). Тем самым теорема доказана.

Наряду с задачей (3) рассмотрим задачу

$$\inf \left\{ \left\| u \right\|^2 + \left\| Lu \right\|^2 : u \in D(L) \cap K, \left\| Au - f_\delta \right\| = \delta \right\}. \tag{14}$$

Теорема 2. Если для любых $u \in K$ и $\lambda \in [0;1]$ $\lambda u \in K$, а $\left\| f_\delta \right\| > \delta$, то задачи (3) и (14) эквивалентны.

Доказательство. Чтобы не проверять разрешимость задачи (14), докажем, что любое из решений задачи (3) является решением задачи (14).

Предположим противное, то есть существует точка $\hat{u} \in K \cap D(L)$ такая, что $\left\| A\hat{u} - f_\delta \right\| < \delta$ и

$$\left\| \hat{u} \right\|^2 + \left\| L\hat{u} \right\|^2 = \inf \left\{ \left\| u \right\|^2 + \left\| Lu \right\|^2 : u \in \Omega_\delta \right\}. \tag{15}$$

Рассмотрим числовую функцию $\varphi(\lambda)$, определяемую формулой

$$\varphi(\lambda) = \left\| A_\lambda \hat{u} - f_\delta \right\|, \ \lambda \in [0;1]. \tag{16}$$

Из (16) следует непрерывность функции $\varphi(\lambda)$ на отрезке $[0;1]$ и что

$$\varphi(1) = \left\| A\hat{u} - f_\delta \right\| < \delta. \tag{17}$$

Тогда из (17) следует существование числа $\tau > 0$ такого, что для любого значения λ, удовлетворяющего условию $|\lambda - 1| < \tau$, выполняется неравенство

$$\varphi(\lambda) < \delta. \tag{18}$$

Таким образом, из (18) следует, что $\varphi\left(1-\frac{\tau}{2}\right)=\left\|A\left[\left(1-\frac{\tau}{2}\right)\hat{u}\right]-f_\delta\right\|<\delta$ и, следовательно, $\left(1-\frac{\tau}{2}\right)\hat{u}\in\Omega_\delta$, а $\left(1-\frac{\tau}{2}\right)^2\|\hat{u}\|^2+\left(1-\frac{\tau}{2}\right)^2\|L\hat{u}\|^2<\|\hat{u}\|^2+\|L\hat{u}\|^2$, что противоречит тому, что $\hat{u}$ решение задачи (3).

Таким образом, $\|A\hat{u}-f_\delta\|=\delta$ и $\hat{u}$ является решением задачи (14).

То, что любое решение задачи (14) является решением задачи (3) очевидно.

Теорема 3. Если для любых $u\in K$ и $\lambda\in[0;1]$, $\lambda u\in K$, то решение задачи (3) единственно.

Доказательство. Предположим, что $\|f_\delta\|>\delta$ и теорема неверна. Тогда существуют точки $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2\in\Omega_\delta$ такие, что $\hat{u}_1\neq\hat{u}_2$ и

$$\|\hat{u}_1\|^2+\|L\hat{u}_1\|^2=\|\hat{u}_2\|^2+\|L\hat{u}_2\|^2=\inf\left\{\|u\|^2+\|Lu\|^2:u\in\Omega_\delta\right\}. \tag{19}$$

Пусть $\hat{u}=\frac{\hat{u}_1+\hat{u}_2}{2}$. Тогда из соотношения (19) будет следовать, что

$$\|\hat{u}\|^2+\|L\hat{u}\|^2\leq\inf\left\{\|u\|^2+\|Lu\|^2:u\in\Omega_\delta\right\}. \tag{20}$$

Так как из теоремы 2 следует, что $\|A\hat{u}_1-f_\delta\|=\delta$ и $\|A\hat{u}_2-f_\delta\|=\delta$, то из строгой выпуклости гильбертова пространства F следует, что

$$\|A\hat{u}-f_\delta\|<\delta. \tag{21}$$

Из (21) следует существование числа $\tau>0$ такого, что $\left\|A\left[\left(1-\frac{\tau}{2}\right)\hat{u}\right]-f_\delta\right\|<\delta$, а, следовательно,

$$\left(1-\frac{\tau}{2}\right)\hat{u}\in\Omega_\delta. \tag{22}$$

Тогда из (20) и (22) будет следовать, что

$$\left(1-\frac{\tau}{2}\right)^2\|\hat{u}\|^2+\left(1-\frac{\tau}{2}\right)^2\|L\hat{u}\|^2<\inf\left\{\|u\|^2+\|Lu\|^2:u\in\Omega_\delta\right\}. \tag{23}$$

Соотношение (23) противоречит нашему предположению о существовании двух различных решений задачи (3).

Если $\|f_\delta\|\leq\delta$, то единственным решением задачи (3) является элемент θ. Тем самым теорема доказана.

Решение задачи (3) обозначим через u_δ и определим оператор P_δ, отображающий F в U формулой

$$P_\delta f_\delta=u_\delta. \tag{24}$$

Теперь исследуем непрерывность оператора P_δ на множестве $\overline{AK}+\overline{S}_{\delta_0}$, где $\overline{S}_{\delta_0}=\left\{f:f\in F,\|f\|\leq\delta_0,0<\delta_0<\delta\right\}$. Для этого наряду с задачей (3) рассмотрим аналогичную задачу

$$\inf\left\{\|u\|^2+\|Lu\|^2:u\in D(L)\cap K,\|Au-f_\delta(n)\|\leq\delta\right\}, \tag{25}$$

где $f_\delta(n)\in F$. Из теорем 1–3 будет следовать существование единственного решения $u_\delta(n)$ задачи (25).

В дальнейшем мы будем предполагать, что множество K является выпуклым, замкнутым и удовлетворяет условию: для любых $u\in K$ и $\lambda\in[0;1]$, $\lambda u\in K$.

Теорема 4. Если f_δ и $\{f_\delta(n)\}\subset\overline{AK}+\overline{S}_{\delta_0}$, $\|f_\delta\|>\delta$ и для любого n $f_\delta(n)\geq\delta$, а $f_\delta(n)\to f_\delta$ при $n\to\infty$, то $\|u_\delta(n)-u_\delta\|^2+\|Lu_\delta(n)-Lu_\delta\|^2\to0$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\{n_k\}$ такие, что для любого k $\|f_\delta(n_k)\| > \delta$ и

$$\|u_\delta(n_k) - u_\delta\|^2 + \|Lu_\delta(n_k) - Lu_\delta\|^2 \geq \varepsilon_0^2. \tag{26}$$

Так как $f_\delta \in \overline{AK} + \overline{S}_{\delta_0}$, то существует точка $\overline{u} \in D(L) \cap K$ такая, что

$$\|A\overline{u} - f_\delta\| < \delta. \tag{27}$$

Из того, что $f_\delta(n_k) \to f_\delta$ при $k \to \infty$, следует существование номера k_1 такого, что для любого $k \geq k_1$

$$\|f_\delta(n_k) - f_\delta\| \leq \|A\overline{u} - f_\delta\| + \frac{\delta - \|A\overline{u} - f_\delta\|}{2}. \tag{28}$$

Из (27) и (28) следует существование номера $k_2 > k_1$ такого, что для любого $k \geq k_2$

$$\|f_\delta(n_k) - f_\delta\| < \frac{\delta - \|A\overline{u} - f_\delta\|}{2}. \tag{29}$$

Таким образом, из (28) и (29) следует, что при $k \geq k_2$

$$\|f_\delta(n_k) - A\overline{u}\| \leq \delta, \tag{30}$$

а из (30), что для любого $k \geq k_2$

$$\|u_\delta(n_k)\|^2 + \|Lu_\delta(n_k)\|^2 \leq \|\overline{u}\|^2 + \|L\overline{u}\|^2. \tag{31}$$

Из (31) следует слабая предкомпактность последовательностей $\{u_{n_k}\}$ и $\{Lu_{n_k}\}$, а так как оператор L линеен и замкнут, то без ограничения общности можем считать, что существует точка $\hat{u} \in D(L) \cap K$ такая, что

$$u_\delta(n_k) \overset{сл}{\to} \hat{u} \text{ при } k \to \infty \tag{32}$$

и

$$Lu_\delta(n_k) \overset{сл}{\to} L\hat{u} \text{ при } k \to \infty. \tag{33}$$

Так как оператор A линеен и ограничен, то из соотношения (32) следует, что

$$Au_\delta(n_k) - f_\delta(n_k) \overset{сл}{\to} A\hat{u} - f_\delta \text{ при } k \to \infty. \tag{34}$$

Из соотношения (34) по свойству нормы слабого предела будем иметь, что

$$\|A\hat{u} - f_\delta\| \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \|Au_\delta(n_k) - f_\delta(n_k)\|. \tag{35}$$

Из того, что для любого k $\|Au_\delta(n_k) - f_\delta(n_k)\| \leq \delta$, а $f_\delta(n_k) \to f_\delta$ при $k \to \infty$, на основании (35) будем иметь, что

$$\|A\hat{u} - f_\delta\| \leq \delta. \tag{36}$$

Из (32) и (33) по свойству нормы слабого предела будет следовать, что

$$\|\hat{u}\|^2 + \|L\hat{u}\|^2 \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \left\{\|u_\delta(n_k)\|^2 + \|Lu_\delta(n_k)\|^2\right\}. \tag{37}$$

Теперь введем в рассмотрение последовательность $\{\hat{u}_k\}$, определяемую формулой

$$\hat{u}_k = \gamma_k u_\delta + (1 - \gamma_k)\overline{u}, \tag{38}$$

где $\gamma_k \in [0;1]$ и удовлетворяет условию

$$\|A\hat{u}_k - f_\delta\| = \delta - \|f_\delta(n_k) - f_\delta\|. \tag{39}$$

Из (38) и (39) следует, что для любого k

$$\|A\hat{u}_k - f_\delta\| \leq \gamma_k \|Au_k - f_\delta\| + (1 - \gamma_k)\|A\overline{u} - f_\delta\|, \tag{40}$$

а из (40), что для любого k

$$\|A\hat{u}_k - f_\delta\| \le \gamma_k\delta + (1-\gamma_k)\|A\overline{u} - f_\delta\| < \delta. \tag{41}$$

Так как $f_\delta(n_k) \to f_\delta$ при $k \to \infty$, то из (41) следует, что

$$\gamma_k \to 1 \text{ при } k \to \infty. \tag{42}$$

Из (38) и (42) следует, что $\hat{u}_k \to u_\delta$ при $k \to \infty$ и $L\hat{u}_k \to Lu_\delta$ при $k \to \infty$.

Таким образом,

$$\|\hat{u}_k\|^2 + \|L\hat{u}_k\|^2 \to \|u_\delta\|^2 + \|Lu_\delta\|^2, \tag{43}$$

а из определения $u_\delta(n_k)$ и теоремы 2, что для любого k

$$\|Au_\delta(n_k) - f_\delta\| \ge \delta - \|f_\delta(n_k) - f_\delta\|. \tag{44}$$

Из определения $u_\delta(n_k)$ и формулы (44) следует, что для любого k

$$\|u_\delta(n_k)\|^2 + \|Lu_\delta(n_k)\|^2 \le \inf\left\{\|u\|^2 + \|Lu\|^2 : u \in D(L) \cap K, \|Au - f_\delta\| \le \delta - \|f_\delta(n_k) - f_\delta\|\right\}, \tag{45}$$

а из (39), что для любого k

$$\inf\left\{\|u\|^2 + \|Lu\|^2 : u \in D(L) \cap K, \|Au - f_\delta\| \le \delta - \|f_\delta(n_k) - f_\delta\| \le \|\hat{u}_k\|^2 + \|L\hat{u}_k\|^2\right\}. \tag{46}$$

Из (43), (45) и (46) следует, что

$$\|u_\delta\|^2 + \|Lu_\delta\|^2 \ge \overline{\lim_{k\to\infty}}\left\{\|u_\delta(n_k)\|^2 + \|Lu_\delta(n_k)\|^2\right\}, \tag{47}$$

а из определения u_δ и (36), что

$$\|u_\delta\|^2 + \|Lu_\delta\|^2 \le \|\hat{u}\|^2 + \|L\hat{u}\|^2. \tag{48}$$

Из (37), (47) и (48) следует, что

$$\|u_\delta\|^2 + \|Lu_\delta\|^2 = \|\hat{u}\|^2 + \|L\hat{u}\|^2 = \lim_{k\to\infty}\left\{\|u_\delta(n_k)\|^2 + \|Lu_\delta(n_k)\|^2\right\}. \tag{49}$$

Таким образом, из (36), (49) и теоремы 3 следует, что

$$u_\delta = \hat{u}. \tag{50}$$

Из (32), (33) и (50) следует, что

$$u_\delta(n_k) \xrightarrow{сл} u_\delta \text{ при } k \to \infty, \tag{51}$$

$$Lu_\delta(n_k) \xrightarrow{сл} Lu_\delta \text{ при } k \to \infty, \tag{52}$$

а из (51) и (52), что

$$\|u_\delta\| \le \underline{\lim_{k\to\infty}}\|u_\delta(n_k)\| \tag{53}$$

и

$$\|Lu_\delta\| \le \underline{\lim_{k\to\infty}}\|Lu_\delta(n_k)\|. \tag{54}$$

Из (49), (53) и (54) следует, что

$$\|u_\delta(n_k)\| \to \|u_\delta\| \text{ при } k \to \infty \tag{55}$$

и

$$\|Lu_\delta(n_k)\| \to \|Lu_\delta\| \text{ при } k \to \infty, \tag{56}$$

а из (51), (52), (55) и (56), что $u_\delta(n_k) \to u_\delta$, а $Lu_\delta(n_k) \to Lu_\delta$ или $\|u_\delta(n_k) - u_\delta\| + \|Lu_\delta(n_k) - Lu_\delta\| \to 0$ при $k \to \infty$, что противоречит (26) и доказывает теорему.

Теорема 5. Если f_δ и $\{f_\delta(n)\} \subset \overline{AK} + \overline{S}_{\delta_0}$, $\|f_\delta\| \le \delta$, а $f_\delta(n) \to f_\delta$ при $n \to \infty$, то $\|u_\delta(n)\|^2 + \|Lu_\delta(n)\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Как отмечалось ранее, при условии $\|f_\delta\| \le \delta$ задача (3) имеет единственное решение $u_\delta = \theta$. Рассмотрим два случая.

1-й случай. Пусть $\|f_\delta\| < 0$. Тогда существует номер N такой, что для любого $n \geq N$ имеет место соотношение $\|f_\delta(n)\| < \delta$ а, следовательно, при $n \geq N$ $u_\delta(n) = \theta$ и $\|u_\delta(n)\|^2 + \|Lu_\delta(n)\|^2 = 0$.

2-й случай. Предположим, что $\|f_\delta\| = \delta$. Тогда без ограничения общности можем считать, что

$$\|f_\delta(n)\| > \delta. \tag{57}$$

Из (57) и теорем 1–3 следует, что для любого n существует единственное решение $u_\delta(n) \neq 0$ вариационной задачи (3).

Предположим, что теорема неверна. Тогда существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\{n_k\}$ такие, что для любого k

$$\|u_\delta(n_k)\|^2 + \|Lu_\delta(n_k)\|^2 \geq \varepsilon_0^2. \tag{58}$$

Так как $f_\delta \in \overline{AK} + \bar{S}_{\delta_0}$, где $\delta_0 < \delta$, то существует элемент $\bar{u} \in D(L) \cap K$ такой, что

$$\|A\bar{u} - f_\delta\| < \delta. \tag{59}$$

Из (59) и того, что $f_\delta(n_k) \to f_\delta$ при $k \to \infty$, следует существование номера k_0 такого, что для любого $k \geq k_0$

$$\|f_\delta(n_k) - f_\delta\| < \frac{\delta - \|A\bar{u} - f_\delta\|}{2}. \tag{60}$$

Теперь введем в рассмотрение последовательность $\{\bar{u}_k\}$, определяемую формулой

$$\bar{u}_k = \lambda_k \bar{u}, \tag{61}$$

где для любого $k \geq k_0$ $\lambda_k \in (0;1)$ и

$$\|A\bar{u}_k - f_\delta\| = \delta - \|f_\delta(n_k) - f_\delta\|. \tag{62}$$

Из (60) следует существование числа λ_k, удовлетворяющего соотношениям (61) и (62), а из (62) следует, что для любого $k \geq k_0$

$$\|A\bar{u}_k - f_\delta(n_k)\| \leq \delta. \tag{63}$$

Из (63) и того, что $\bar{u}_k \in D(L) \cap K$ следует, что для любого $k \geq k_0$

$$\|u_\delta(n_k)\|^2 + \|Lu_\delta(n_k)\|^2 \leq \|\bar{u}_k\|^2 + \|L\bar{u}_k\|^2, \tag{64}$$

а из (61), (62) и того, что $f_\delta(n_k) \to f_\delta$ при $k \to \infty$, следует, что

$$\lambda_k \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{65}$$

Таким образом, из (65) следует, что

$$\|\bar{u}_k\|^2 + \|L\bar{u}_k\|^2 \to 0 \text{ при } k \to \infty, \tag{66}$$

а из (64) и (66), что

$$\|u_\delta(n_k)\|^2 + \|Lu_\delta(n_k)\|^2 \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{67}$$

Соотношение (67) противоречит (58) и доказывает теорему.

Из теорем 4, 5 следует, что оператор P_δ, определяемый формулой (24), непрерывен на множестве $\overline{AK} + \bar{S}_{\delta_0}$,

$$P_\delta \in C\left[\overline{AK} + \bar{S}_{\delta_0}\right]. \tag{68}$$

III. Решение одной обратной задачи физики твердого тела. Следуя [2], задача определения энергетического спектра бозе-системы по ее теплоемкости может быть сведена к интегральному уравнению первого рода типа свертки

$$Au = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau - \xi) u(\xi) d\xi = f(\tau), \ -\infty < \tau < +\infty, \tag{69}$$

где $G(\tau)=\dfrac{e^{-3\tau}}{4\operatorname{sh}^2\left(e^{-\tau}/2\right)}$, а u и $f\in L_2(-\infty;+\infty)$.

Предположим, что при $f(\tau)=f_0(\tau)$ существует точное решение $u_0(\xi)$ уравнения (69), которое удовлетворяет следующим условиям:

$$u_0(\xi)\geq 0 \tag{70}$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u_0(\xi)\right|^2 d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u_0'(\xi)\right|^2 d\xi\leq r^2, \tag{71}$$

где $u_0'(\xi)$ – производная от функции $u_0(\xi)$, а r – некоторое число.

Предположим, что вместо функции $f_0(\tau)$ нам известны функция $f_\delta(\tau)\in L_2(-\infty,+\infty)$ и $\delta>0$ такие, что

$$\left\|f_\delta-f_0\right\|\leq\delta. \tag{72}$$

Требуется, используя исходную информацию, определить приближенное решение $u_\delta(\xi)$. Введем следующие обозначения:

$$K=\left\{u(\xi):u(\xi)\in L_2(-\infty;+\infty),u(\xi)\geq 0\,п.в.\right\}$$

и

$$Lu(\xi)=\frac{du(\xi)}{d\xi},\ u \text{ и } Lu\in L_2(-\infty;+\infty).$$

Используя для задачи (69)–(72) метод, изложенный в первом пункте настоящей статьи, сведем ее к вариационной задаче

$$\inf\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}u^2(\xi)d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u'(\xi)\right|^2 d\xi : u(\xi)\geq 0, u(\xi)\in W_2^1(-\infty;+\infty), \left\|Au-f_\delta\right\|\leq\delta\right\}. \tag{73}$$

Решив задачу (73), мы получим приближенное решение $u_\delta(\xi)$ задачи (69)–(72).

Литература

1. Иванов, В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода / В.К. Иванов// Журн. вычиел. математики и мат. физики. - 1966. - Т. 6, № 6. - С. 1089-1094.

2. Лифшиц, И.М. Об определении энергетического спектра бозе-системы по ее теплоемкости / И.М. Лифшиц // ЖЭТФ. - 1954. - Т. 26. - Вып. 5. - С. 551-556.

Поступила в редакцию 1 декабря 2009 г.

METHOD OF THE INVERSE PROBLEM SOLUTION USING AN ADDITIONAL A PRIORI INFORMATION

There is additional *a priori* information about the exact solution useful for qualitative improvement of the approximate solution in many inverse problems of the mathematical physics. In this article the generalization of the discrepancy method suggested by V.K. Ivanov in the article [1]. The discrepancy method allows using additional a priori information.

Keywords: Hilbert space, an operational equation, an improperly posed problem, a discrepancy method.

Grigorieva Olga Vladimirovna - Post-Graduate Student, the South Ural State University.

Григорьева Ольга Владимировна - аспирант, Южно-Уральский государственный университет.

e-mail: zvezdolya@mail.ru