

УСТОЙЧИВЫЕ ЯВНЫЕ СХЕМЫ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн, Н. Машрабов

Предлагается численный метод интегрирования уравнения теплопроводности, основанный на комбинации явной и неявной схемы с использованием линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Предложенный численный метод проверяется на некоторой задаче, для которой известно точное решение.

Ключевые слова: устойчивые явные схемы, устойчивость, погрешность, теплопроводность,

В работах [1,2] предложена и обоснована явная устойчивая численная схема для уравнения теплопроводности. В этой схеме разностные соотношения заменялись обыкновенными дифференциальными уравнениями или линейными уравнениями с частными производными первого порядка. Была доказана абсолютная устойчивость этой схемы. В настоящей работе предложенный численный метод сравнивается с известным точным решением.

Рассмотрим осесимметричную задачу распределения температуры U в однородном теплоизолированном цилиндре. Все геометрические размеры отнесем к длине R радиуса цилиндра, время отнесем к величине R^2/α , где α^2 - коэффициент температуропроводности материала цилиндра.

В безразмерных цилиндрических координатах вторая смешанная осесимметричная задача имеет вид: в области $Q: \{(r,z,t); 0 \leq r < 1, 0 < z < H, t > 0\}$ требуется найти функцию $U(r, z, t)$, дважды дифференцируемую по r и z , непрерывно дифференцируемую по t , непрерывно дифференцируемую в замыкающие области, удовлетворяющую внутри области уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

начальному условию

$$U(r, z, 0) = \varphi(r, z) \quad (2)$$

и краевым условиям

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ при } r=1; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ при } z=0 \text{ или } z=H. \quad (3)$$

Здесь $\varphi(r, z)$ - заданная непрерывная функция. Разобьем отрезок $[0, H]$ оси z на m одинаковых участков и обозначим $\Delta z = H/m$, $z_j = \Delta z/2 + j\Delta z$, $j = 1 \dots m$. Радиус цилиндра $[0, 1]$ разобьем на n участков, причем длина участка, начинающегося на оси цилиндра ($r = 0$), в два раза короче длин остальных одинаковых участков. Обозначим $h = 2/(2n-1)$, $r_i = i \cdot h$, $u_{i,j}$ - значение температуры в точке (r_i, z_j) в текущий момент времени t ; $\tilde{u}_{i,j}$ - температура в той же точке в момент времени $t + \Delta t$.

Разностный метод для явной схемы выглядит так [3, 4]:

$$\frac{\tilde{u}_{i,j} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{1}{r_i} \left[\left(r_i + \frac{h}{2} \right) (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - \left(r_i - \frac{h}{2} \right) (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right] + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta z^2} \quad (4)$$

$$(i = 1 \dots n-1, j = 1 \dots m),$$

$$\frac{\tilde{u}_{0,j} - u_{0,j}}{\Delta t} = 4 \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h^2} + \frac{u_{0,j+1} - 2u_{0,j} + u_{0,j-1}}{\Delta z^2} \quad (j = 1 \dots m).$$

Теперь совершим некоторое движение к неявной схеме: значения u_{ij} и u_{0j} будем рассматривать в момент времени $t + \Delta t$. Уравнения (4) примут вид:

$$\frac{\tilde{u}_{i,j} - u_{i,j}}{\Delta t} + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right) \tilde{u}_{i,j} = \frac{1}{r_i} \frac{\left(r_i + \frac{h}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(r_i - \frac{h}{2} \right) u_{i,j-1}}{h^2} + \frac{u_{i,jn} + u_{i,j-1}}{\Delta z^2}$$

$$(i = 1 \dots n-1, j = 1 \dots m),$$

$$\frac{\tilde{u}_{0,j} - u_{0,j}}{\Delta t} + \left(\frac{4}{h^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right) \tilde{u}_{0,j} = \frac{4}{h^2} u_{1,j} + \frac{u_{0,jn} + u_{0,j-1}}{\Delta z^2} \quad (j = 1 \dots m).$$

Обозначим

$$f_{ij} = \frac{\left(r_i + \frac{h}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(r_i - \frac{h}{2} \right) u_{i,j-1}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{\Delta z^2}, \quad i = 1 \dots n-1,$$

$$f_{0,j} = \frac{4}{h^2} u_{1,j} + \frac{u_{0,j+1} + u_{0,j-1}}{\Delta z^2} \quad (j = 1 \dots m),$$

$$\lambda_i = \frac{2}{h^2} + \frac{2}{\Delta z^2}, \quad \lambda_0 = \frac{4}{h^2} + \frac{2}{\Delta z^2}$$

и в уравнениях (5) перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$.

Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{u}_{i,j}}{dt} + \lambda_i \tilde{u}_{i,j} = L_{i,j}, \quad i = 0 \dots n-1, j = 1 \dots m. \quad (7)$$

Но в этих уравнениях появляются значения индексов $i = n, j = 0$ и $j = m + 1$. Для обеспечения граничных условий (3) введем фиктивные слои [5–7] $i = n, j = 0$ и $j = m + 1$ и положим для текущего момента времени t

$$u_{n,j} = u_{n-1,j} \quad j = 1 \dots m,$$

$$u_{i,0} = u_{i,1}, \quad u_{i,m+1} = u_{i,m}, \quad i = 0 \dots n-1. \quad (8)$$

Интегрируя уравнение (7) на отрезке $[t, t + \tau]$ и считая f_{ij} постоянным на этом отрезке, получим

$$\bar{u}_{i,j} = u_{i,j} \cdot e^{-\lambda_i \tau} + \frac{1}{r_i} \left(1 - e^{-\lambda_i \tau} \right) f_{i,j} \quad (i = 0 \dots n-1, j = 1 \dots m). \quad (9)$$

Полученное значение $\bar{u}_{i,j}$ считаем начальным условием для следующего временного слоя.

Полученная схема является явной, ибо ее получение не требует решения систем уравнений. Абсолютную устойчивость схемы обеспечивает член $e^{-\lambda_i t}$ [2].

Для сравнения предложенной численной схемы с точным решением рассмотрим два члена ряда, полученного методом разделения переменных (методом Фурье):

$$U(t, r, z) = T_0 + T_1 \cdot e^{-pt} J_0(lr) \cdot \cos(sz), \quad (10)$$

где T_0 и T_1 – числа, заданные произвольно, $J_0(t)$ – функция Бесселя первого индекса, $s = \frac{\pi}{H}$, $p = l^2 + s^2$, l – первый нулевой корень уравнения

$$\frac{d}{dl} J_0(l) = 0. \quad (11)$$

В качестве начальных условий ($t = 0$) берем функцию

$$U(0, r, z) = T_0 + T_1 J_0(lr) \cos(sz)$$

и для некоторых значений t сравниваем решение (10) с решением по схеме (8) и (9) [6, 7].

В данной задаче $H = 5$; $l = 3,83171$ [8]; $s = 0,628319$; $p = 15,0768$; $h = 0,105263$. Результаты расчетов изменения температуры по радиусу и по длине цилиндра приведены в табл. 1, а график –

на рис. 1. Кроме этого, в результате расчетов установлено, что максимальное отклонение между $T_{\text{числ}}$ и $T_{\text{теор}}$ достигается через 2,85 с на двадцатом сечении и составляет 3,9 °С (0,45 %).

Таблица 1

Результаты расчетов для двумерной осесимметричной задачи

Кол-во элем. участ. по длине	Распределение начальное		Распределение ч-з 1 сек.		Распределение ч-з 2 сек.		Распределение ч-з 3 сек.		Макс. отклонение, %
	1	2	3	4	5	6	7	8	
	Числ. начальное	Теор. начальное	Числ. через 1 с	Теор. через 1 с	Числ. через 2 с	Теор. через 2 с	Числ. через 3 с	Теор. через 3 с	
1	1249,23	1249,23	1163,28	1159,96	1106,88	1102,67	1069,99	1065,89	0,39
2	1243,09	1243,09	1159,26	1156,02	1104,25	1100,14	1068,28	1064,27	0,38
3	1230,97	1230,97	1151,32	1148,24	1099,05	1095,15	1064,87	1061,07	0,38
4	1213,16	1213,16	1139,65	1136,81	1091,42	1087,81	1059,87	1056,36	0,33
5	1190,1	1190,1	1124,54	1122,01	1081,53	1078,31	1053,39	1050,26	0,29
6	1162,36	1162,36	1106,37	1104,21	1069,63	1066,88	1045,6	1042,93	0,27
7	1130,63	1130,63	1085,58	1083,84	1056,02	1053,81	1036,69	1034,54	0,22
8	1095,67	1095,67	1062,68	1061,4	1041,03	1039,41	1026,87	1025,29	0,17
9	1058,36	1058,36	1038,23	1037,46	1025,03	1024,04	1016,39	1015,43	0,09
10	1019,62	1019,62	1012,85	1012,59	1008,41	1008,08	1005,51	1005,19	0,02
11	980,385	980,385	987,15	987,411	991,588	991,92	994,491	994,814	0,04
12	941,639	941,639	961,766	962,542	974,971	975,958	983,609	984,569	0,09
13	904,329	904,329	937,323	938,596	958,971	960,589	973,13	974,705	0,16
14	869,375	869,375	914,424	916,161	943,981	946,19	963,313	965,463	0,22
15	837,638	837,638	893,631	895,791	930,37	933,116	954,399	957,072	0,28
16	809,899	809,899	875,458	877,987	918,473	921,689	946,608	949,738	0,33
17	786,84	786,84	860,352	863,188	908,585	912,19	940,132	943,641	0,37
18	769,03	769,03	848,684	851,757	900,947	904,853	935,13	938,932	0,40
19	756,908	756,908	840,742	843,976	895,748	899,86	931,725	935,727	0,43
20	750,771	750,771	836,722	840,037	893,116	897,331	930,002	934,104	0,44

С целью оценки влияния числа элементарных участков по радиусу, по длине и шага по времени τ на максимальные отклонения между $T_{\text{числ}}$ и $T_{\text{теор}}$ проведены численные эксперименты, результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты сравнительных численных расчетов

Кол-во элементарных участков	Шаг по времени dt , с							
	1,0		0,1		0,01		0,001	
	T_q , °С	$\frac{T_q - T_m}{T_q}$, %	T_q , °С	$\frac{T_q - T_m}{T_q}$, %	T_q , °С	$\frac{T_q - T_m}{T_q}$, %	T_q , °С	$\frac{T_q - T_m}{T_q}$, %
5	1157,4	7,74	1099,7	2,62	1085,5	0,64	1082,5	0,56
10	1184,2	13,16	1109,8	1,40	1094,2	0,39	1075,8	0,13
20	1218,0	17,27	1140,4	7,52	1098,5	0,99	1092,0	0,16
30	1233,2	18,50	1170,4	11,80	1104,5	2,09	1093,5	0,23
40	1238,1	19,06	1192,1	14,35	1112,9	3,53	1094,4	0,39
50	1241,6	19,35	1205,6	15,88	1122,9	5,17	1095,5	0,60

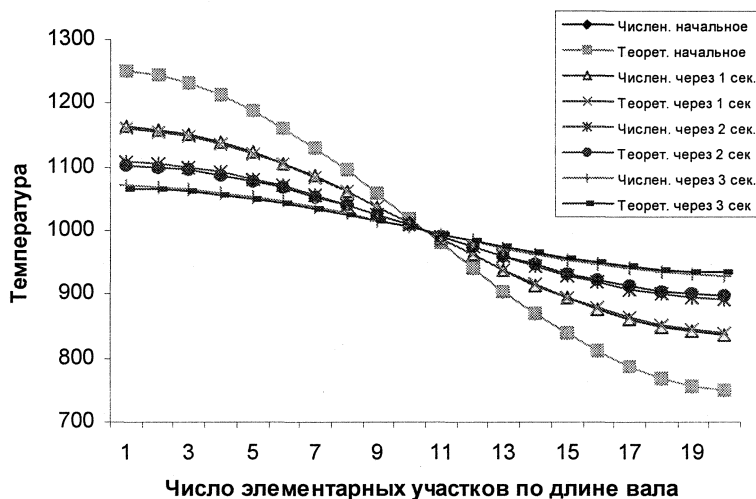


Рис. 1. График изменения температуры от времени для двухмерной осесимметричной задачи

Результаты сравнительных численных расчетов показывают, что с уменьшением шага по времени увеличивается точность численного расчета, при этом пропорционально увеличивается машинное время счета для любого варианта расчетов (при любых количествах элементарных участков). Для конкретных режимов, когда известны радиус и длина цилиндра, а также заданы шаг по времени и количество элементарных участков, можно установить конкретное значение соответствующего отклонения между $T_{\text{числ}}$ и $T_{\text{теор}}$. Проведенные расчеты показали, что при шаге менее 1 с рациональное количество участков по радиусу равно 10, при этом максимальная ошибка не превышает 3 %. В прикладных задачах такая методика расчета для разных диаметров и длин изделий, технологических режимов обработки и предъявленных требований позволяет определять рациональное количество элементарных участков для деталей типа тел вращения.

Литература

1. Геренштейн, А.В. Нагревание круга движущимся теплоисточником /А.В. Геренштейн, Н. Машрабов // Обзорение прикладной и промышленной математики. - 2008. - Т. 15, №5. - С. 870-871.
2. Геренштейн, А.В. Устойчивые явные схемы для уравнения теплопроводности /А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн, Н. Машрабов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». - 2008. - Вып. 1. - № 15 (115). - С. 9-11.
3. Самарский, А.А. Теория разностных схем /А.А. Самарский. - М.: Наука, 1989. - 616 с.
4. Годунов, С.К. Разностные схемы / С.К.Годунов, В.С. Рябенкий. - М.: Наука, 1977. - 440 с.
5. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. - М.: Мир, 1982. - 235 с.
6. Геренштейн, А.В. Расчет температурных полей в цилиндре при действии поверхностных тепловых источников «Тепло 4.0» / А.В. Геренштейн, Н. Машрабов, Е.А. Геренштейн // Государственная регистрация в Отраслевом фонде алгоритмов и программ № 9776, 20.02.2008. - М.: ФГНУ ГКЦИТ, 2008.
7. Машрабов, Н. Расчет температурных полей в цилиндре при действии поверхностных тепловых источников «Тепло 5.0» / Н. Машрабов, А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн //Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2008612210, 30.04.2008, РОСПАТЕНТ.
8. Янке, Е. Специальные функции (формулы, графики, таблицы) / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. - М.: Наука, 1964. - 344 с.

Поступила в редакцию 5 ноября 2009 г.

**INDEPENDENT OBVIOUS SCHEMES OF THE HEAT EQUATION
FOR THE AXISYMMETRIC COMMITMENT**

In produced paper the numerical method of integration of a heat equation grounded on a speed key of the obvious and implicit scheme utilization of linear differential equations of the first order is offered. The tendered numerical method is mustered on some commitment for which one the exact solution is known.

Keywords: independent obvious schemes, sustainability, a lapse, thermal conductivity.

Herreinstein Arkady Wasiljevich - Cand.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Applied Math. Department, South Ural State University.

Геренштейн Аркадий Васильевич - кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.

Herreinstein Evgenija Arkadjewna - Cand. Sc. (Engineering), Senior Teacher of the Applied Math. Department, South Ural State University.

Геренштейн Евгения Аркадьевна - кандидат технических наук, старший преподаватель, кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.

e-mail; h-jane@rambler.ru

Mashrabov Nematulla - Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, stand technics and organization of an engineering SVC, Chelyabinsk state agroengineering academy.

Машрабов Нематулла - кандидат технических наук, доцент, кафедры технологии и организации технического сервиса, Челябинская государственная агроинженерная академия.