

# МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО МОМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ \*

В.В. Купцов, М.Ю. Петушков, А. С. Сарваров  
г. Магнитогорск, МГТУ

## METHOD OF ANALYSIS OF THE ELECTROMAGNETIC TORQUE FOR THE PROBLEMS OF THE FINITE ELEMENT MODELING OF THE INDUCTION MOTOR

V. V. Kuptsov, M. Y. Petushkov, A. S. Sarvarov  
Magnitogorsk, Magnitogorsk State Technical University

Предложена методика расчета электромагнитного момента асинхронного двигателя через тензор напряжения Максвелла для задач конечно-элементного моделирования. Результаты расчетов сравниваются с известным методом косвенного определения момента АД.

*Ключевые слова:* электромагнитный момент, тензор напряжения Максвелла, конечно-элементное моделирование, асинхронный двигатель.

The method of analysis of the electromagnetic torque of the induction motor using Maxwell stress tensor for the problems of the FE modeling is offered. The calculation data are compared with the well-known method of the indirect determination of the torque of the induction motor.

*Keywords:* electromagnetic torque, Maxwell stress tensor, finite element modeling, induction motor.

Дальнейшее развитие теории электрических машин сложно представить без разработки комплексных математических моделей, максимально использующих возможности современной вычислительной техники. На кафедре электроники и микроэлектроники Магнитогорского государственного технического университета ведутся работы в одном из таких направлений. Речь идет о разработке конечно-элементных математических моделей асинхронных двигателей с короткозамкнутым ротором. Метод конечных элементов [1-5] находит все большее применение при расчете электротехнических устройств благодаря высокому уровню приближения математической модели к объекту исследования на уровне физики протекающих в нем электромагнитных, электромеханических и тепловых процессов. Фактически данный уровень приближения ограничивается только возможностями используемой компьютерной техники. Так, в частности, при моделировании асинхронных двигателей, метод конечных элементов позволяет точно учитывать геометрию машины в ее поперечном сечении, а также электрические

параметры двигателя, включая нелинейность кривой намагничивания, сопротивление стержней и соединительных колец ротора и другие особенности, как например, возможные дефекты в магнитной и витковой системе электрической машины.

Фундаментальную роль в преобразовании энергии электромагнитного поля двигателя в механическую энергию вращения ротора играет электромагнитный момент. В задачах численного анализа электрических машин для вычисления сил и моментов наибольшее распространение получили методы, основанные на интегрировании так называемого тензора напряжения Максвелла (Maxwell's stress tensor) [4-6].

Рассмотрим ротор двигателя и замкнутую поверхность  $S$ , окружающую ротор (рис. 1). Используя тензор напряжения Максвелла, можно получить выражение для элементарной силы, действующей со стороны магнитного поля:

$$d\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{B} \cdot \vec{n} \right) \vec{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \vec{n}, \quad (1)$$

где  $\vec{n}$  – вектор единичной нормали к поверхности  $S$ .

\* По материалам НИР, выполняемой в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 годы» по контракту ГК НК- 66(7) № П232.

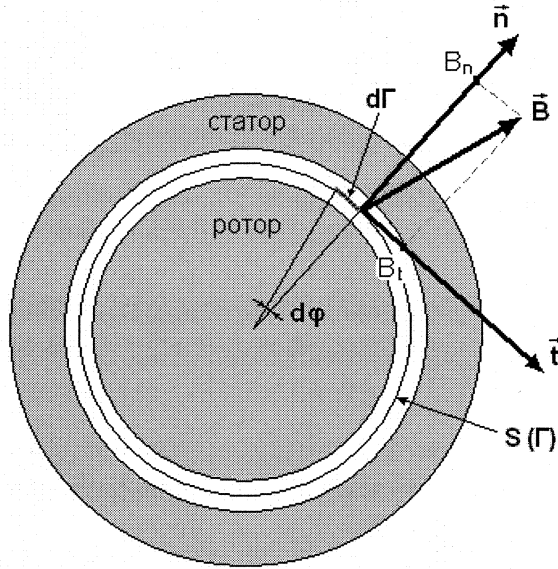


Рис. 1. Поперечное сечение двигателя и поверхность интегрирования S

Поскольку поле в поперечном сечении двигателя обычно принимается плоскопараллельным, то вектор магнитной индукции можно представить двумя ортогональными составляющими:

$$\vec{B} = B_n \vec{n} + B_t \vec{t}, \quad (2)$$

где  $B_n$  – составляющая, нормальная к поверхности S;  $B_t$  – составляющая, тангенциальная к поверхности S;  $\vec{t}$  – вектор единичной касательной к поверхности S.

Подставив (2) в (1), получим:

$$d\vec{F} = \frac{1}{2\mu_0} (B_n^2 - B_t^2) \vec{n} - \frac{1}{\mu_0} B_n B_t \vec{t}. \quad (3)$$

Момент, действующий на ротор со стороны магнитного поля, может быть выражен интегралом по поверхности S следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \oint_S \left( \vec{r} \times d\vec{F} \right) dS = \\ &= \oint_S \left( \vec{r} \times \left[ \frac{1}{2\mu_0} (B_n^2 - B_t^2) \vec{n} - \frac{1}{\mu_0} B_n B_t \vec{t} \right] \right) dS, \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки, лежащей на поверхности S.

Поскольку нормальная составляющая силы не участвует в создании вращающего момента, то выражение (4) можно упростить:

$$\vec{M} = \oint_S \left( \vec{r} \times \left[ -\frac{1}{\mu_0} B_n B_t \vec{t} \right] \right) dS. \quad (5)$$

Принимая допущение о плоскопараллельности поля внутри двигателя, интеграл по поверхности S можно заменить криволинейным интегралом по замкнутому контуру Γ, в который вырождается поверхность S:

$$\vec{M} = l \cdot \oint_{\Gamma} \left( \vec{r} \times \left[ -\frac{1}{\mu_0} B_n B_t \vec{t} \right] \right) d\Gamma, \quad (6)$$

где  $l$  – длина активного пространства двигателя.

Подставив в (6) следующие выражения:

$$\left| \vec{r} \times \vec{t} \right| = \left| \vec{r} \right| \cdot \left| \vec{t} \right| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{D_r + l_{\delta}}{2};$$

$$d\Gamma = \frac{D_r + l_{\delta}}{2} d\varphi,$$

получим:

$$M = -\frac{l \cdot (D_r + l_{\delta})^2}{4\mu_0} \cdot \int_0^{2\pi} B_n B_t d\varphi, \quad (7)$$

где  $D_r$  – диаметр ротора;  $l_{\delta}$  – ширина воздушного зазора.

Возвращаясь к методу конечных элементов, рассмотрим приведенный на рис. 2 фрагмент сетки конечных элементов расчетной области поперечного сечения двигателя в области воздушного зазора. Сетка состоит из трех слоев, образованных треугольными конечными элементами.

Используя рис. 2, формулу (7) для вычисления электромагнитного момента можно приближенно записать в виде

$$M = -\frac{l \cdot (D_r + l_{\delta})^2}{4\mu_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{B_{n,i-1} B_{t,i-1} + B_{n,i} B_{t,i}}{2} \Delta\varphi_i, \quad (8)$$

где  $B_{n,i}$  и  $B_{t,i}$  – соответственно нормальная и тангенциальная, относительно контура интегрирования Γ, составляющие вектора магнитной индукции в центре масс  $i$ -го конечного элемента среднего слоя сетки воздушного зазора двигателя;

$N$  – число конечных элементов в среднем слое сетки воздушного зазора.

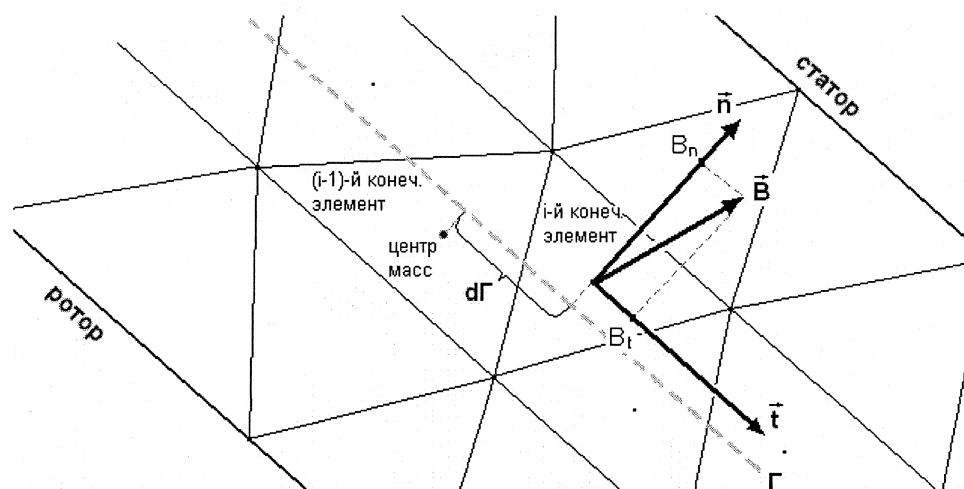


Рис. 2. Пояснение к расчету электромагнитного момента

В формуле (8) используется среднее между двумя соседними конечными элементами значение произведения  $B_n B_t$ .

В работе [7] изложена методика косвенного определения моментов на валу АД, согласно которой момент АД определится как:

$$\begin{cases} e_a = u_a - i_a \cdot R \\ e_b = u_b - i_b \cdot R \\ \psi_a = -\int e_a dt \\ \psi_b = -\int e_b dt \\ M_{эв} = \sqrt{3} \cdot p \cdot (\psi_a \cdot i_b - \psi_b \cdot i_a), \end{cases} \quad (9)$$

где  $R$  – активное сопротивление обмотки статора;  $p$  – число пар полюсов асинхронного двигателя;  $u_a, u_b, i_a, i_b, e_a, e_b, \psi_a, \psi_b$  – мгновенные значения фазных напряжений, токов, э.д.с. и потокосцепления соответственно;  $M_{эв}$  – электромагнитный момент асинхронного двигателя.

На рис. 3 представлена кривая электромагнитного момента, рассчитанного через тензор напряжения Максвелла по формуле (8), полученная при моделировании прямого пуска АД. По результатам моделирования была получена еще одна кривая электромагнитного момента АД, рассчитанного косвенным методом по формулам (9).

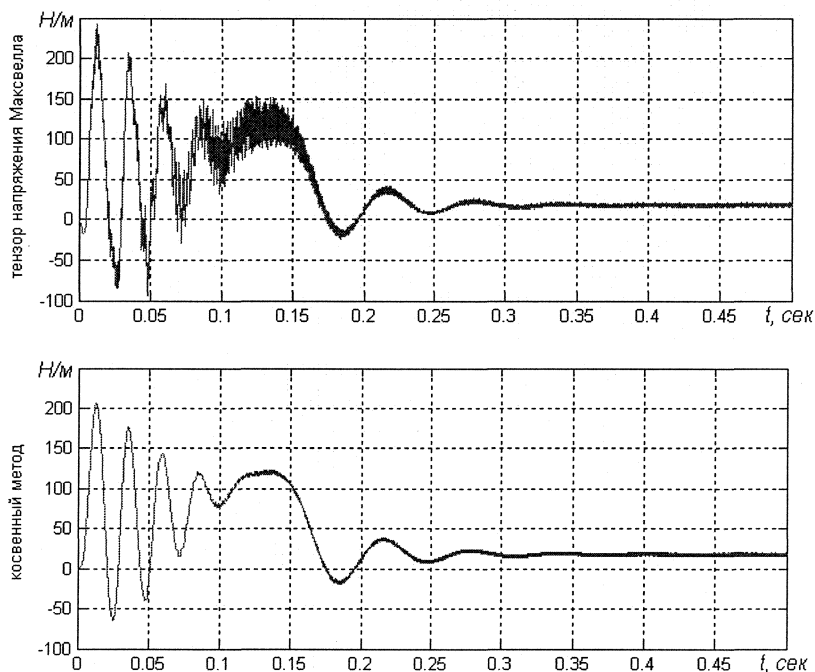


Рис. 3. Сравнение кривых электромагнитного момента пуска АД, рассчитанных двумя методами

## Литература

1. **Сегерлинд, Л.** Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд; пер. с англ. - М: Мир, 1979. - 393 с.

2. **Шрейнер, Р.Т.** Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты / Р.Т. Шрейнер. - Екатеринбург: УРО РАН, 2000. - 654 с.

3. **Бахвалов, Н.С.** Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. - 632 с.

4. **Luomi, J.** Finite element methods for electrical machines. Lecture notes for a postgraduate course in electrical machines / J. Luomi. - Chalmers Univer-

sity of Technology, Department of Electrical Machines and Power Electronics, Goteborg, 1993.

5. **Chari, M. V.K.** Finite elements in electrical and magnetic field problems. / M.V.K. Chari, P.P. Silvester. - J. Wiley & Sons, New York, 1980. - 219 p.

6. **Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement / N. Sadowski, Y. Lefevre, M. Lajoie-Mazenc, J. Cros.** - IEEE Trans, on Magnetics. - March, 1992. - Vol. 28. -P. 1410-1413.

7. **Определение энергосиловых параметров процессов обработки металлов давлением косвенным методом / А.А. Радионов, Д.Ю. Усатый, А.С Карандаев, А.С Сарваров.** -М., 2000.

*Поступила в редакцию 19.02.2010 г.*

**Купцов Владимир Викторович** - аспирант кафедры электроники и микроэлектроники ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова».

**Kuptsov Vladimir Viktorovich** is a post-graduate student of the Electronics and Microelectronics Department of Magnitogorsk State Technical University.

**Петушков Михаил Юрьевич** - кандидат технических наук, доцент кафедры электроники и микроэлектроники ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова».

**Petushkov Mikhail Yurievich** is Cand. Sc. (Engineering), Assistant Professor of the Electronics and Microelectronics Department of Magnitogorsk State Technical University.

**Сарваров Анвар Сабулханович** - доктор технических наук, профессор, декан факультета автоматизации и вычислительной техники ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова».

**Sarvarov Anvar Sabulhanovich** is Dr.Sc. (Engineering), Professor, Dean of the Automation and Computer Science Faculty of Magnitogorsk State Technical University.