

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ (ИЗМЕНЯЕМОЙ) СТРУКТУРЫ И ОБЛАСТИ ОСОБЫХ ПОЛОЖЕНИЙ МЕХАНИЗМА С УЧЁТОМ ЗАЗОРОВ И ВЫРОЖДЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР

В.И. Пожбелко

GENERATION VARIABLE (CHANGEABLE) STRUCTURE AND DISTRICT PARTICULAR CONFIGURATIONS OF THE MECHANISM WITH CHINKS AND DEGENERATION OF THE KINEMATIC PAIRS

V.I. Pozhbelko

Рассмотрена расчётная схема учёта зазоров и образования области особых положений в реальных механизмах и выявлена внутрицикловая переменность их структуры в результате вокального вырождения и восстановления их кинематических пар. Предложены обобщённые критерии существования в механизме области особых положений и на основании предлагаемой теоремы об образовании области особых положений исследованы размеры этой области в механизмах с зазорами в кинематических парах.

Ключевые слова: переменная структура механизма с зазорами, вырождение кинематических пар, критерий области особых положений механизма.

The paper presents modeling of real mechanisms with chinks and districts of particular configurations of mechanism as a result of degeneration kinematic pairs. Suggested theorem and generalized structural, metrical and analytical criterions of district particular configurations of the pin joints mechanisms.

Keywords: variable mechanisms, generation changeable structure, district particular configurations.

Традиционно в общей теории механизмов и механике машин (ТМ и ММ) для упрощения решаемых задач рассматриваются *идеализированные* механизмы без зазоров в кинематических парах [1-12]. Применительно, например, к вращательным кинематическим парам это означает, что диаметр отверстия абсолютно равен диаметру плотно установленного в него (без какого-либо зазора) вала, в результате чего разные понятия «шарнир» и «кинематическая пара» оказываются тождественными.

Такое идеализированное рассмотрение механизмов без учёта зазоров вполне допустимо для анализа [2, 3] *неособых* (регулярных) положений, тогда как анализ *особых* (сингулярных) положений механизмов и точный учёт при этом области существования кинематических пар и возникающей переменности их структуры требует перехода к моделям реальных механизмов с зазорами в кинематических парах.

Под *особым положением механизма* понимается [1] расположение звеньев механизма, при котором происходит изменение его структуры (переменность структуры), заключающееся либо в появлении неуправляемой подвижности (нарушается определённость движения), либо в исчезновении некоторых степеней свободы (возникают «мёртвые точки»). За критерий особого положения в механизмах без зазоров обычно принимается нулевое значение определителя матрицы Якоби [8, 9] выявляющее только один частный случай нулевого особого положения (возникающего при расположении кинематических пар цепи на одной прямой).

Установлено [3, с. 90], что в любом неособом (регулярном) положении система линейных уравнений геометрического анализа механизма имеет единственное решение, а в особых положениях - эта система уравнений не имеет решения, что указывает на неопределённость движения выходных звеньев механизма.

В данной работе будет рассмотрен случай возникновения особых положений, при которых происходит увеличение числа степеней свободы механической системы, и проанализированы

причины возникновения переменности (изменяемости) структуры механической системы при переходе механизмов с зазорами через особые положения.

В одних случаях особые положения являются вредными — например, в параллелограммных шарнирных механизмах в особых положениях возникает неопределённость движения ведомых звеньев, а в технологическом оборудовании с параллельными приводами координатного перемещения рабочего органа [7] в особых положениях полностью теряется управляемость и резко снижается жёсткость привода [8, 9].

В других случаях особые положения являются полезными и даже необходимыми - примеры эффективного использования особых положений в технологических машинах с механизмами переменной структуры приведены в монографиях [5, 6].

В данной статье для реальных механизмов с учётом зазоров в кинематических парах будет показано влияние взаиморасположения звеньев кинематической цепи на угловой размер γ возникающей области особых положений механизма, выведена формула расчёта обобщённого критерия этих положений $\gamma \geq 0$, рассмотрена возникающая в пределах особых положений переменность структуры механической системы и предложена теорема об образовании области особых положений в механических системах с зазорами в кинематических парах.

Визуализация зазоров и возникновение области особых положений в реальных механизмах

В реальных механизмах для вращения вала в отверстии должна быть его подвижная посадка с неизбежными зазорами, величина которых ещё и возрастает по мере износа трущихся деталей в процессе их эксплуатации под нагрузкой.

Предложенное в работе [11] для реальных механизмов определение кинематической пары - «кинематическая пара - это подвижное соединение двух звеньев, накладывающее условия связи, ограничивающие относительное перемещение звеньев» - наиболее полно отражает двойственный характер подвижного соединения звеньев как сочетание её подвижности $H = 1...5$ с числом одновременно накладываемых ей ограничений $S = 1... 5$ из общего условия $S + H = 6$.

Используем данное определение для рассмотрения тождественности понятий «шарнир» и «кинематическая пара» и отметим, что применяемые для формализации строения механической системы [11] термины «шарнир» и «кинематическая пара» для реальных механизмов с зазорами являются разными понятиями:

а) *шарнир* - это конструктивное выполнение подвижного (вращательного) соединения «звено - отверстие» (может быть, простой [11], совмещённый [12], цилиндрический, сферический [1]);

б) *кинематическая пара* - это подвижное соединение двух звеньев, накладывающее условия связи, ограничивающие относительное перемещение звеньев.

Сопоставление указанных понятий означает, что именно в особых положениях кинематической цепи в шарнире происходит выпадение условий связи (шарнир перестаёт накладывать ограничения, т. е. вырождается как кинематическая пара), что и приводит к увеличению в этих положениях числа степеней свободы механической системы (W). Тогда с учётом зазоров в реальных механизмах это локальное вырождение кинематической пары должно привести к образованию целой области особых положений $\gamma \geq 0$ (а не только одного из них при нулевом якобиане).

Таким образом, в данной работе предлагается новая трактовка понятия «переменность (изменяемость) строения механизма», связывая эту локальную переменность с прекращением существования в особых положениях кинематических пар шарнирно-сочленённой цепи (т. е. с внутрицикловым вырождением кинематической пары в пределах угла γ , возникающей в реальных механизмах с зазорами области особых положений).

На рис. 1 представлена визуализация зазоров шарнирно-сочленённой цепи реальных механизмов, где через $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ обозначим суммарный зазор во всех кинематических парах цепи, приводящий к образованию области возникающих особых положений в пределах угла γ внутрициклового вырождения кинематической пары A (с последующим её восстановлением в пределах угла $\varphi = 2\pi - \gamma$).

На расчётных схемах областей особых положений в пределах угла γ обозначено (см. рис. 1): O_1O_2 - внешние кинематические пары цепи; A - шарнирная контактная точка взаимодействующих звеньев цепи; пунктирными прямыми обозначены границы существования кинематической пары в пределах угла $\varphi = 2\pi - \gamma$.

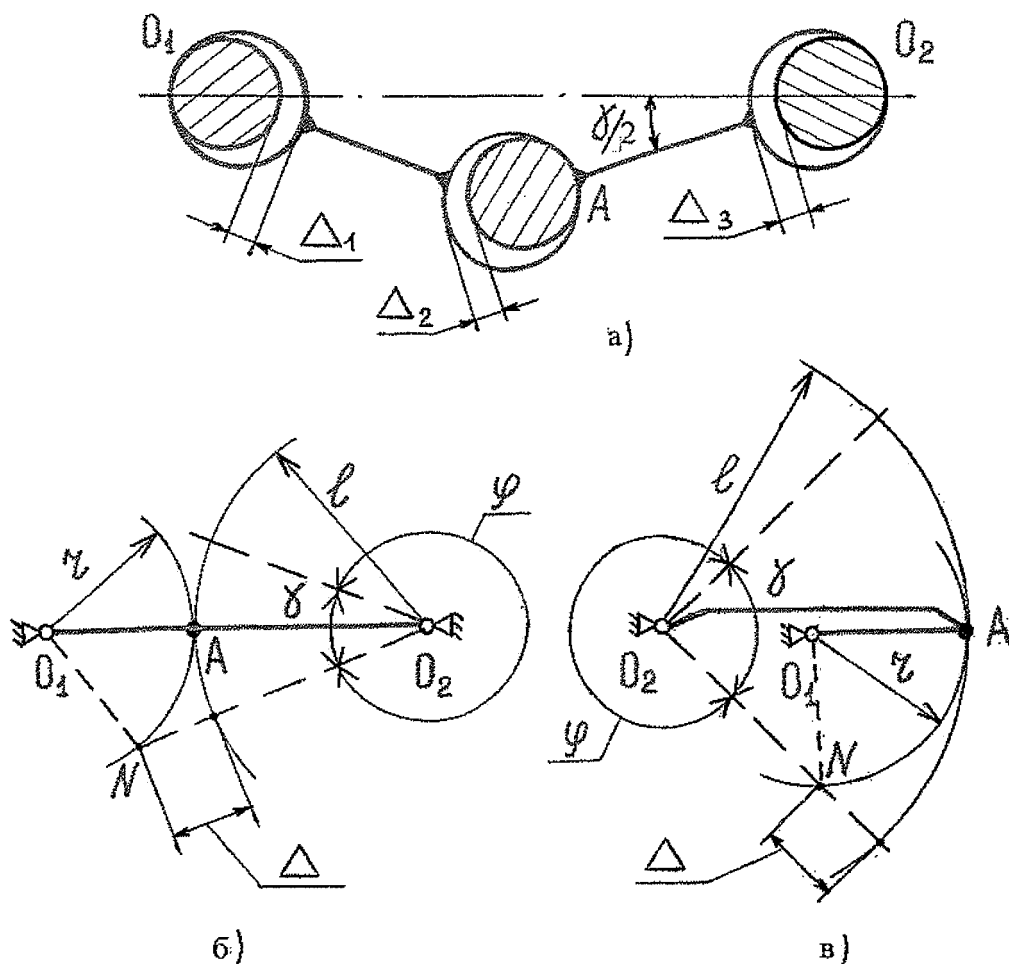


Рис. 1. Визуализация зазоров (а) и расчётные схемы областей особых положений в шарнирно-сочленённой кинематической цепи I типа (б) и II типа (в)

Критерии образования области особых положений механизмах с зазорами

Предлагаемые различные виды критериев образования в механизмах с зазорами области особых положений можно разделить на структурные, метрические и математические.

1. *Структурный критерий* - обусловлен внутрицикловым локальным вырождением кинематических пар - в пределах угла γ области особых положений механизма.

В результате этой перестройки механической системы возникает два типа геометрической структуры механизмов с областями особых положений (см. рис. 1), отличающихся расположением внешних шарниров O_1O_2 : по разные стороны (I тип) или по одну сторону (II тип) от точки A контакта звеньев.

2. *Метрический критерий* - заключается в выполнении определённого соотношения длин звеньев механизма, при котором возникает внутрицикловое вырождение кинематических пар (в пределах угла γ области особых положений).

Применительно, например, к четырёхзвенным шарнирным механизмам метрический критерий представляет собой следующую систему уравнений из трёх граничных равенств, согласно которым сумма длин двух любых звеньев (смежных или противоположных) должна быть равна сумме длин двух других звеньев (предельные механизмы по правилу Грасгофа [2]):

Расчет и конструирование

$$1 + L_1 = L_2 + L_3; \quad (1)$$

$$1 + L_2 = L_1 + L_3; \quad (2)$$

$$1 + L_3 = L_1 + L_2; \quad (3)$$

где L_1, L_2, L_3 - безразмерные длины подвижных звеньев 1, 2 и 3 шарнирного четырёхзвенника на рис. 2, полученные делением их длин (l_1, l_2, l_3) на длину стойки (l_0):

$$L_1 = \frac{l_1}{l_0}; L_2 = \frac{l_2}{l_0}, L_3 = \frac{l_3}{l_0}.$$

Зависимости (1), (2) и (3) представляют собой граничные прямые I, II, III (рис. 2), построенные в координатах $L_2 - L_3$ при $L_1 = \text{const}$. Расположение точек отображения метрических параметров L_2 , (длин звеньев кинематической цепи) на каждой из этих прямых I, II, III отвечает выполнению одного или сразу нескольких равенств (1), (2), (3) и приводит к образованию в реальном механизме с зазорами одной (кроме точек 1, 2, 3), двух (точки 1 и 2 пересечения только двух прямых) или трёх (общая точка 3 пересечения всех трёх прямых) областей особых положений в пределах угла γ (см. рис. 1).

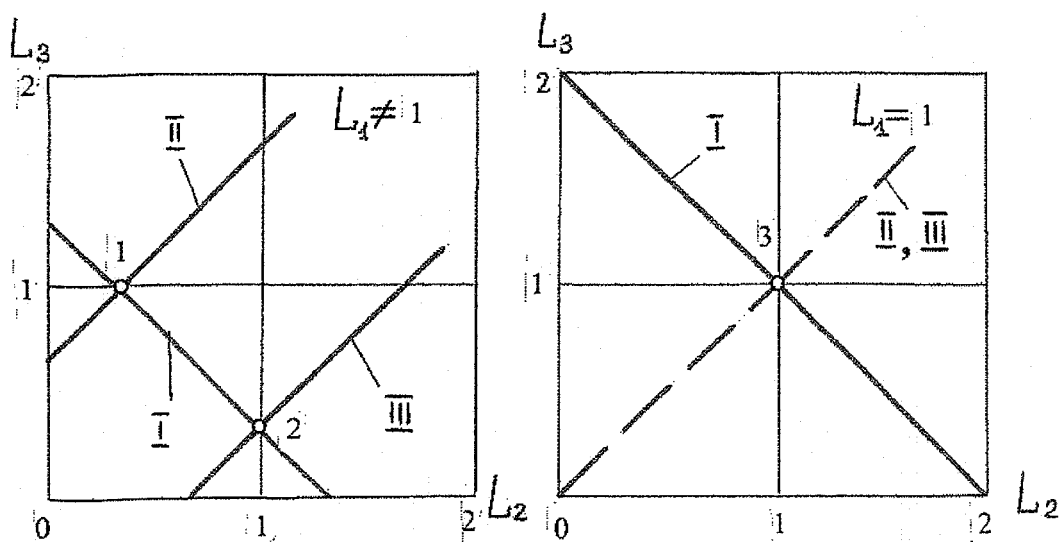


Рис. 2. Диаграммы относительных метрических параметров шарнирных механизмов с областями особых положений

3. *Математический критерий* — устанавливает аналитическую взаимосвязь между размером γ возникающей области особых положений при разных длинах звеньев цепи и зазорах и может быть определён из геометрического анализа треугольника O_1O_2N с известными длинами всех сторон (см. рис. 1) в следующем общем размерном виде:

$$\gamma = 2 \left\{ \arccos \left[\frac{(l \pm r)^2 + (l \pm \Delta)^2 - r^2}{2(l \pm r)(l \pm \Delta)} \right] \right\} \geq 0, \quad (5)$$

или безразмерном виде:

$$\gamma = 2 \left\{ \arccos \left[\frac{(1 \pm 2\lambda)^2 + (1 \pm \delta)^2}{2(1 \pm \lambda)(1 \pm \delta)} \right] \right\} \geq 0, \quad (6)$$

содержащем безразмерные параметры, определяющие соотношение длин звеньев (λ) и относительный суммарный зазор (δ) во всех кинематических парах цепи:

$$\lambda = \frac{r}{l}; \quad \delta = \frac{\Delta}{l}. \quad (7)$$

В выражениях (5) и (6) знак «плюс» относится к структуре I типа (сплошные кривые на рис. 3), а знак «минус» относится к структуре II типа (пунктирные линии на рис. 3). Сводный график образующихся в механизмах с зазорами I и II типа (см. рис. 1, б и в) областей особых положений, построенный по зависимости (6), представлен на рис. 3 и указывает необходимые конструктивные пути создания механизмов как с уменьшенной, так и, наоборот, с увеличенной областью особых положений.

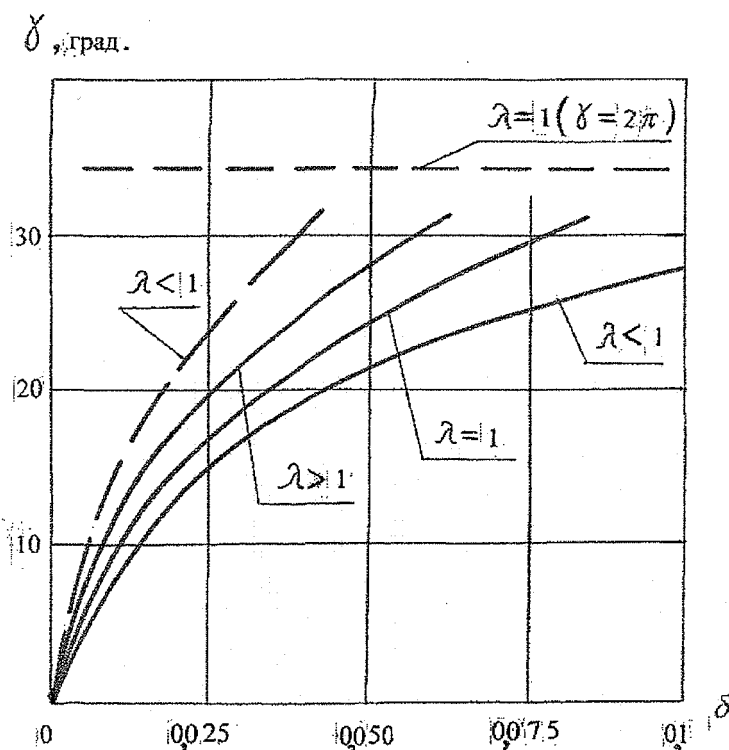


Рис. 3. Графики изменения размера области особых положений: — I тип; - - II тип

Из анализа графика на рис. 3 следует, что возникающая в реальных механизмах с зазорами область особых положений с увеличенным числом степеней свободы может иметь различные размеры (угол γ), а именно:

а) уменьшается в геометрической структуре I типа или увеличивается в геометрической структуре II типа;

б) увеличивается с увеличением отношения длин взаимодействующих звеньев (λ) и зазоров (δ) и в структуре второго II типа при $\lambda = 1$ достигает максимума $\gamma_{\max} = 2\pi$, который не зависит от величины зазоров в кинематических парах цепи.

Примеры переменной структуры различных механических систем в результате локального вырождения кинематических пар в пределах областей особых положений (на схемах такие пары обозначены сплошным кружком) приведены на рис. 4.

Расчёт числа степеней свободы механической системы (W) в примерах на рис. 4, выполненный по известной структурной формуле Чебышева [2], показывает, что из-за рассмотренного вырождения (выпадения условий связи) кинематических пар во всей области особых положений γ происходит уменьшение числа кинематических пар цепи, что и является основной причиной увеличения W (т. е. изменяемости структуры системы) при прохождении через область $\gamma \geq 0$ (при отсутствии или неучёте зазоров в механизмах эта область уменьшается до одного нулевого особого положения).

В приведенных на рис. 4 примерах показано, что группы Ассур (см. рис. 4, а, в) могут стать механизмами из-за вырождения кинематической пары в шарнире А в особом положении, возникающем при специально подобранном соотношении длин звеньев $O_1O_2 = O_1A + AB$ (см. рис. 4, б) или при пересечении в одной точке О всех поводков в трёхповодковой группе (см. рис. 4, з).

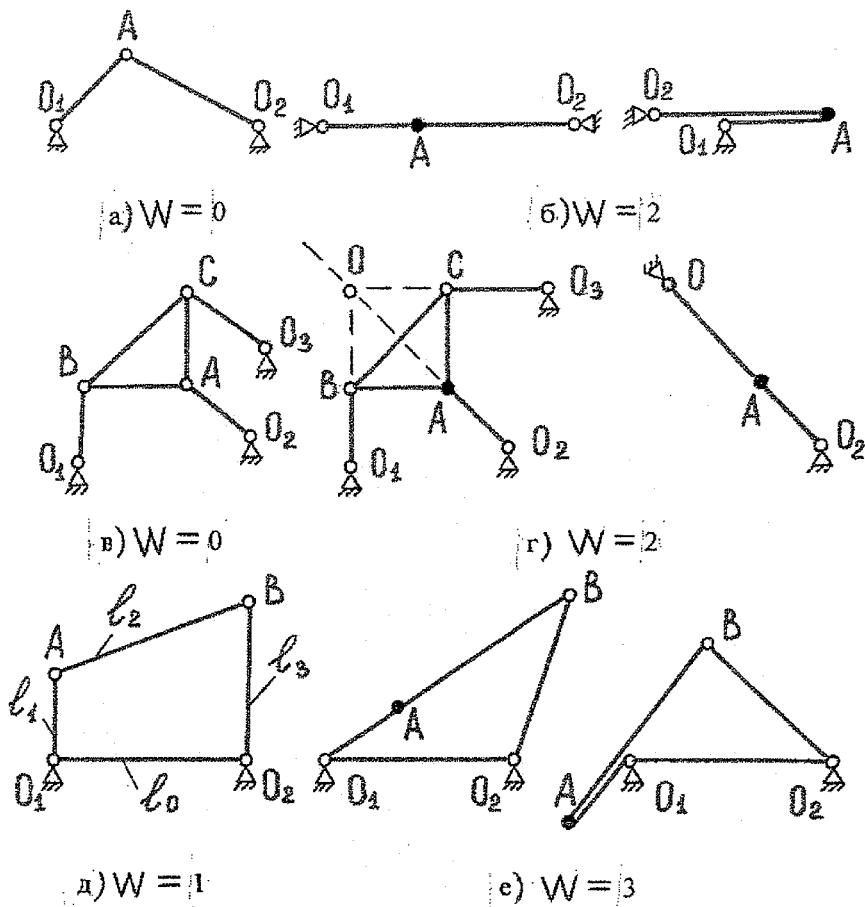


Рис. 4. Примеры изменения структуры цепи в результате локального вырождения кинематических пар (обозначены сплошным кружком) в пределах областей особых положений

В другом случае одноподвижный механизм (см. рис. 4, д) в крайних положениях (см. рис. 4 е) из-за выпадения в шарнире А условий связи в пределах возникающей области особых положений γ превращается в многоподвижный механизм, т. е. автоматически происходит внутрицикловое изменение его структуры: число кинематических пар в процессе движения звеньев становится равным то четырем (шарниры O_1, A, B, O_2), то трём (шарниры O_1, B, O_2 на рис 4, е).

Примечание. При выполнении четырёхзвенного механизма (см. рис. 4, д) в виде параллелограмма (точки 1 и 2 на графике рис. 2) из-за возможного расположения всех шарниров (O_1, A, B, O_2) на одной прямой будет происходить в области γ выпадение условий связи сразу в двух шарнирах (А и В) - в результате этого общее число кинематических пар будет уменьшаться до двух (O_1, O_2), а степень подвижности (по формуле Чебышева) ещё больше увеличится в особых положениях (см. рис. 4, е).

Заключение

1. Выведенный математический критерий возникновения области особых положений вида (6)

$$\gamma = 2 \left\{ \arccos \left[\frac{(1 \pm 2\lambda)^2 + (1 \pm \delta)^2}{2(1 \pm \lambda)(1 \pm \delta)} \right] \right\} \geq 0$$

является более полным по сравнению с другим признаком - нулевое значение якобиана [8, 9] отражает только один частный случай ($\gamma = 0$) расположения кинематических пар цепи на одной прямой.

Применительно к семейству шарнирных механизмов геометрическая интерпретация критерия (6) представляет собой диаграмму изменения относительных длин звеньев, в координатах

которой в данных механизмах может возникать одна, две или три (механизм шарнирного квадрата) области особых положений - по числу реализуемых граничных условий (1), (2), (3).

2. На основании предлагаемого математического критерия возникновения области особых положений механизма (6) вида $\gamma \geq 0$ и отвечающей ему диаграммы метрических параметров (см. рис. 3) можно сформулировать следующую теорему об образовании области особых положений в механических системах с зазорами в кинематических парах.

Теорема. В механических системах с зазорами в кинематических парах вследствие локального вырождения кинематических пар возникает область особых положений с увеличенным числом степеней свободы механизма, размер γ которой зависит от взаимного расположения звеньев и кинематических пар и увеличивается с увеличением величины зазоров и соотношения длин взаимодействующих звеньев.

Следствие 1. Расположение в шарнирно-сочленённых цепях внешних кинематических пар по разные стороны от точки контакта взаимодействующих звеньев приводит к уменьшению области особых положений по сравнению с расположением этих пар по одну сторону от точки контакта.

Следствие 2. С уменьшением расстояния между внешними шарнирами двухзвенной кинематической цепи до нуля возникающая область особых положений увеличивается до предела $\gamma_{\max} = 2\pi$, а кинематическая цепь превращается в кривошипный механизм.

3. Рассматриваемый в данной статье расширенный принцип переменности (изменения) структуры механической системы связан с внутрицикловым локальным вырождением кинематических пар (в пределах угла γ области особых положений) и последующим их восстановлением (в пределах угла $\varphi = 2\pi - \gamma$) без изменения внутри цикла числа звеньев цепи.

Примечание. Предельный случай нулевого критерия $\gamma = 0$ не реализуется в практике машиностроения, так как соответствует только теоретически безззорным и безызносным подвижным соединениям механизмов (когда область особых положений вырождается в отдельную линию — аналогично нулевому значению определителя матрицы Якоби [8, 9]).

4. В связи с обнаруженным в пределах угла γ области особых положений внутрицикловым вырождением кинематических пар и периодическим из-за этого в крайних положениях увеличением числа степеней свободы механизма, все подобные многозвенные механизмы (с крайними положениями) следует рассматривать как имеющие переменную (изменяемую) структуру.

На основании вышеизложенного механические системы с автоматически происходящими внутри цикла (при переходе через область особых положений) локальными структурными изменениями (вырождение и восстановление кинематических пар) целесообразно выделить в отдельный класс: «механизмы с локально переменной структурой» (в отличие от переключаемой переменной структуры механизмов за счёт стопорения или блокирования их звеньев [1, с. 448]).

5. Согласно критерию γ области особых положений механизма ($\gamma \geq 0$) и графику $\gamma(\delta)$ (см. рис. 3) можно сделать следующие практические рекомендации по проектированию рациональных механизмов с зазорами в кинематических парах:

а) область *вредных* особых положений (потеря управляемости и жёсткости привода механизмов, например, параллельной структуры) можно уменьшить за счёт применения геометрической структуры механизмов I типа (см. рис. 1) и уменьшения в них значений λ и δ ;

б) область *полезных* особых положений (управляемого переключения разных вариантов строения механизма именно в этих положениях [5, 6]), наоборот, можно увеличить за счёт применения геометрической структуры II типа (см. рис. 1) и увеличения в них значений λ и δ .

6. Основной причиной наблюдаемой на практике в механизмах в разных положениях при движении их звеньев структурной перестройки (переменности структуры) механической системы является автоматически происходящее в пределах области особых положений γ выпадение условий связи в отдельных кинематических парах (с последующим восстановлением этих связей).

Предлагаемый учет в особых положениях указанного выпадения условий связи заключается в происходящем в области γ уменьшении числа кинематических пар при расчёте подвижности механизмов по формулам Чебышева и Сомова-Малышева (что делает эти формулы полностью

пригодными и для расчёта механических систем во всех особых положениях - подтверждающего увеличение числа степеней их свободы).

Литература

1. Крайнев, А.Ф. Механика (искусство построения) машин. Фундаментальный словарь / А.Ф. Крайнев. - М.: Машиностроение, 2000. - 904 с.
2. Теория механизмов и механика машин: учеб. для вузов / К.В. Фролов, А.С. Попов, А.К. Мусатов, Тимофеев Г.А.; под ред. К.В. Фролова. — М.: Изд-во МГТУ им. М.Э. Баумана, 2004. — 664 с.
3. Теория механизмов и машин: учеб. пособие для студентов высших учебных заведений / М.З. Коловский, А.Н. Евграфов, Ю.А. Семёнов, А.В. Слоущ. - М.: Издательский центр «Академия», 2006. - 560 с.
4. Международная конференция по теории механизмов и механике машин: сб. докл. (9-16 октября 2006 г.). - Краснодар: Изд-во КГТУ, 2006. - 297 с.
5. Абдраимов, С. Шарнирно-рычажные механизмы переменной структуры / С. Абдраимов, М.С. Джуматаев. - Бишкек: Изд-во «Илим», 1993. - 177 с.
6. Абдраимов, Э.С. Структурный синтез плоских механизмов переменной структуры / Э.С. Абдраимов. - Бишкек: Изд-во «Илим», 2001. - 100 с.
7. Тверской, М.М. Станок с параллельными приводами координатных перемещений рабочего органа / М.М. Тверской // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». - 2007. - Вып. 9. - №11 (83). - С. 61-66.
8. Особые положения (сингулярности) механизмов параллельной структуры / В.А. Глазунов, А.Ф. Крайнев, Р.М. Грунтович и др. // Сборник докладов междунар. конф. по ТМ и ММ. - Краснодар: Изд-во КГТУ, 2006. - С. 57-58.
9. Сюзькина, Ю.Л. Особые положения технологического оборудования с параллельными приводами рабочего органа / Ю.Л. Сюзькина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». - 2009. - Вып. 14. - № 33 (166). - С. 66-71.
10. Пожбелко, В.И. Инерционно-импульсные приводы машин с динамическими связями / В.И. Пожбелко. - М.: Машиностроение, 1989. - 136 с.
11. Пожбелко, В.И. Формализация структурного анализа и синтеза механизмов с кинематическими, гибкими и динамическими связями / В.И. Пожбелко // Известия вузов. Машиностроение. - 2006. - №11. - С. 3-15.
12. Пожбелко, В.И. Некоторые вопросы структурного синтеза плоских рычажных механизмов с учетом применения сложных (совмещённых) шарниров / В.И. Пожбелко // Теория механизмов и машин. - 2006. - Т. 4. - № 1(7). - С. 27-37.

Поступила в редакцию 20 июня 2010 г.

Пожбелко Владимир Иванович. Доктор технических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика и основы проектирования машин», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск). Область научных интересов - теория машин и механизмов, триботехника и биомеханика. Тел. кафедры: (351) 267-92-62.

Vladimir J. Pozhbelko. Doctor of engineering science. Professor of the Theoretical Mechanics and Basic of Design Machine of the South Urals State University. Professional interests: theory of machine and mechanism, tribotechnic, biomechanics. Tel.: (351) 267-92-62.