УДК 517.9 + 681.2

НОВЫЙ ПОДХОД К ИЗМЕРЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИ ИСКАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ

А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк

A NEW APPROACH TO MEASUREMENT OF DYNAMICALLY PERTURBED SIGNALS

A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk

Предложен новый подход к измерению динамически искаженных сигналов, основанный на теории уравнений леонтьевского типа.

Ключевые слова: динамические измерения, уравнения леонтьевского типа

A new approach to the actual measurement of dynamically perturbed signals based on the theory of the Leontieff type equations is offered.

Keywords: dynamically measurement, Leontieff type equations

Введение

Теория динамических измерений возникла и первоначально развивалась как ответвление теории некорректных задач (см. прекрасный обзор в [1]). Между тем развитие техники, в особенности - космонавтики, потребовало создания иных подходов, дающих более точные решения задач динамических измерений, чем теория некорректных задач. Одним из таких подходов, базирующихся на теории автоматического управления (см. например, **[2,** 3]), был предложен в **[4]** и развит в [5, 6].

Суть нового метода заключается в следующем. В качестве модели измерительного устройства (ИУ) предлагается взять модель автоматического управления

$$\dot{x} = Ax + Du, \quad y = Cx \tag{0.1}$$

со следующей трактовкой: $x = x(t)$ - вектор-функция состояний ИУ, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u = u(t)$, $y = y(t)$ - вектор-функции входа и выхода соответственно, $u = (u_1, u_2, \cdots, u_m)$ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_l)$, причем матрицы ИУ А, датчика D и выхода C имеют соответственно размеры $n \times n$, $n \times m$ и $l \times n$. Модель ИУ (0.1) оказалась чрезвычайно удобной при измерении кратковременных импульсов, длящихся от микро- до наносекунд, т.к. хорошо моделирует инерционность ИУ, из-за которой не удается точно измерить пикообразные изменения входного входного сигнала. Эта модель учениками А.Л. Шестакова изучалась в различных аспектах [7-9], что показало ее адекватность широкому кругу измеряемых явлений.

Естественно, при исследовании модели (0.1) использовались понятия и методы теории автоматического управления. Между тем, имеется хорошо разработанная теория [10], апробированная в различных приложениях **[11, 12],** позволяющая делать более детальный анализ модели (0.1). В данной статье впервые теория уравнений Соболевского типа и вырожденных полугрупп операторов [10] применяется для изучения модели (0.1).

Статья кроме введения содержит две части и список литературы. В первой части дана краткая сводка результатов теории **[10],** почерпнутая из [13]. Во второй части дается приложение этой теории к конкретной модели (0.1), взятой из **[9].** Список литературы отражает только личные вкусы и пристрастия авторов и не претендует на полноту.

1. Уравнения леонтьевского типа

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка r. Матрица M называется *регулярной относительно матрицы* L (коротко, *L-регулярной)*, если существует число $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$. Пусть матрица M L-регулярна, тогда существует не более s точек $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s\} \subset \mathbb{C}$, $s \leq r$ таких, что $\det(\mu_k L - M) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, s$. Следуя [13], будем называть множество $\sigma^L(M) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s\}$ *L-спектром* матрицы M. Заметим, что если $\det L \neq 0$, то L-спектр матрицы M совпадет со спектром как матрицы $L^{-1}M$, так и матрицы ML^{-1}. Пусть теперь матрица M L-регулярна, выберем контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r\}$, где $r > \max\{|\mu_1|, |\mu_2|, \ldots, |\mu_s|\}$, и построим матрицы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1} L d\mu, \ Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L(\mu L - M)^{-1} d\mu.$$

Лемма 1.1. *Пусть матрица M L-регулярна, тогда*
(i) $P^2 = P$, $Q^2 = Q$;
(ii) $LP = QL$, $MP = QM$.

Из леммы 1.1. непосредственно вытекает

Теорема 1.1. *Пусть матрица M L-регулярна. Тогда существуют матрицы L^{-1} и M^{-1} такие, что $L^{-1}L = P$, $LL^{-1} = Q$, $M^{-1}M = \mathbb{I}_r - P$, $MM^{-1} = \mathbb{I}_r - Q$.*

Однородную линейную вырожденную (если $\det L = 0$) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L\dot{z} = Mz \tag{1.1}$$

будем называть системой уравнений *леонтьевского типа*, имея в виду ее прообраз – знаменитую балансовую модель Леонтьева с учетом запасов (подробности см. [13]). Вектор-функцию $z = (z_1, z_2, \ldots, z_r)$, $z_k = z_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, r$, $t \in \mathbb{R}$, назовем *решением* системы (1.1), если при подстановке (1.1) обращается в тождество. Решение $z = z(t)$ системы (1.1) называется *решением задачи Коши* для (1.1), если

$$z(0) = z_0 \tag{1.2}$$

для некоторого $z_0 \in \mathbb{R}^r$. В дальнейшем решение задачи (1.1), (1.2) будем обозначать следующим образом: $z = z(t, z_0)$.

Определение 1.1. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathbb{R}^r$ называется *фазовым пространством системы (1.1)*, если

(i) любое решение $z = z(t)$ лежит в $\mathfrak{P}$ поточечно, т.е. $z(t) \in \mathfrak{P}$ при любом $t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любом $z_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение $z = z(t, z_0)$, $t \in \mathbb{R}$ задачи (1.2) для системы (1.1).

Как нетрудно видеть, если $\det L \neq 0$, то фазовым пространством системы (1.1) служит все пространство $\mathbb{R}^r$.

Определение 1.2. Однопараметрическое семейство матриц $Z^{\cdot} = \{Z^t : t \in \mathbb{R}\}$ называется *разрешающей группой системы* (1.1), если

(i) $Z^t Z^s = Z^{t+s}$ при всех $s, t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любом $z_0 \in \mathbb{R}^n$ вектор-функция $z(t) = Z^t z_0$ есть решение системы (1.1);

(iii) образ матрицы Z^0 совпадает с фазовым пространством системы (1.1).

Теорема 1.2. *Пусть матрица M L-регулярна, тогда существует единственная разрешающая группа системы (1.1).*

Искомая группа задается формулой $Z^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu$, $t \in \mathbb{R}$, где контур γ такой же, как при построении матриц P и Q.

Теперь возьмем некоторую вектор-функцию $f : [0, T] \to \mathbb{R}^r$, $T \in \mathbb{R}_+$, и рассмотрим линейную неоднородную систему леоньевского типа

$$L\dot{z} = Mz + f. \tag{1.3}$$

Считая, что матрица M L-регулярна, для системы (1.3) поставим следующую задачу

$$P(z(0) - z_0) = 0. \tag{1.4}$$

Теорема 1.3. *Пусть матрица M L-регулярна, тогда для любого вектора $z_0 \in \mathbb{R}^r$ и любой вектор-функции $f \in C^{r+1}((0,T);\mathbb{R}^r) \cap C^r([0,T];\mathbb{R}^r)$ существует единственное решение $z = z(t, z_0)$, $t \in [0,T]$ задачи (1.3), (1.4), которое к тому же имеет вид*

$$z(t, z_0) = -\sum_{k=0}^{r} H^k M^{-1}(\mathbb{I} - Q)f^{(k)}(t) + Z^t z_0 + \int_0^t R^{t-s} Q f(s) ds. \tag{1.5}$$

Здесь $H = M^{-1}(\mathbb{I} - Q)L(\mathbb{I} - P)$ – нильпотентная в силу теоремы 1.1 матрица, p – ее степень нильпотентности, $p \leq rp$, $R^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu$.

2. Модель измерительного устройства

Сначала редуцируем уравнения (0.1) к уравнениям (1.3). Для этого положим

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & \mathbb{I}_l \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu\mathbb{I} - A)^{-1} & \mathbb{O} \\ -C(\mu\mathbb{I} - A)^{-1} & \mathbb{I}_l \end{pmatrix}.$$

Значит, L-спектр матрицы M совпадает со спектром матрицы A, т.е. $\sigma^L(M) = \sigma(A)$, поэтому матрица M L-регулярна.

В силу леммы 1.1 существуют матрицы

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ -C & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_l \end{pmatrix},$$

а в силу теоремы 1.1 существуют матрицы

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ -C & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}, \; M^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_l & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}.$$

(Факт совпадения матриц $L^{-1} = P$, $L = Q$ случаен, и в случаях общего положения таких совпадений нет). Аналогично строится разрешающая группа системы (1.1), которая в нашем случае имеет вид

$$Z^t = \begin{pmatrix} e^{tA} & \mathbb{O} \\ -Ce^{tA} & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}, \; e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

По теореме 1.4 существует единственное решение задачи

$$x(0) = x_0 \tag{2.1}$$

для системы уравнений

$$L\dot{z} = Mz + D_M v, \tag{2.2}$$

которое к тому же имеет вид

$$z(t, z_0) = Z^t z_0 + \int_0^t R^{t-s} Q D_M v(s) ds. \tag{2.3}$$

Матрица D_M имеет следующий вид: $D_M = \begin{pmatrix} D & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$, поэтому $(\mathbb{I} - Q)D_M = \mathbb{O}$, и, значит, первое слагаемое из формулы (1.5) в формуле (2.3) отсутствует. Вектор-функции $z = z(t)$ и $v = v(t)$ строятся следующим образом: $z = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$, $v = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, поэтому (2.1) то же самое, что и (1.4).

Пример модели ИУ. Рассмотрим модель ИУ, приведенную в [9]. Здесь матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -44 & 0 \\ -\alpha & -16 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -0,594 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad 1).$$

По ним построим матрицы

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -\alpha & -16 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -0,594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

затем вектор $v = (u, 0, 0)$. Система (1.3) приобретет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{z} = \begin{pmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -\alpha & -16 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -0,594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v,$$

где вектор $z = (x_1, x_2, y)$. Методами п.1 решаем задачу (2.1), (2.2), где $x_0 = 0$, и получаем

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{\alpha}{28} \Bigg(& \frac{16}{16^2 + 4\omega^2} \sin^2 \omega t - \frac{1}{16^2 + 4\omega^2} \sin 2\omega t + \frac{1 - e^{-16t}}{32} - \frac{8(1 - e^{-16t})}{16^2 + 4\omega^2} - \\ & - \frac{44}{44^2 + 4\omega^2} \sin^2 \omega t + \frac{1}{44^2 + 4\omega^2} \sin 2\omega t - \frac{1 - e^{-44t}}{88} - \frac{22(1 - e^{-44t})}{44^2 + 4\omega^2} \Bigg). \end{aligned} \tag{2.4}$$

В качестве измеряемого сигнала взят пикообразный импульс $u(t) = A \sin^2 \omega t$. Заметим, что на выходе (2.4) отмечается «затухание» импульса, т.е. уменьшение его амплитуды A, что согласуется с данными эксперимента.

Литература

1. Грановский, В.А. Динамические измерения / В.А. Грановский. - Л.: Энергоиздат, 1984.
2. Деруссо, П. Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. - М.: Наука, 1970.
3. Кузовков, Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства / Н.Т. Кузовков. - М.: Машиностроение, 1976.
4. Шестаков, А.Л. Динамическая точность измерительного преобразователя с корректирующим устройством в виде модели датчика / А.Л. Шестаков // Метрология. - 1987. - № 2. - С. 26 -34.
5. Шестаков, А.Л. Коррекция динамической погрешности измерительного преобразователя линейным фильтром на основе модели датчика / А.Л. Шестаков //· Изв. Вузов. Приборостроение. - 1991. - Т. 34, № 4. - С. 8 - 13.
6. Шестаков, А.Л. Модальный синтез измерительного преобразователя / А.Л. Шестаков // Известия РАН. Теория и системы управления. - 1995. - № 4. - С. 67 - 75.
7. Солдаткина, Е.В. Алгоритмы адаптации параметров измерительной системы к минимуму оценки динамической погрешности: дис. ... канд. техн. наук / Е.В. Солдаткина. - Челябинск, 2000.

8. Бизяев, М.Н. Динамические модели и алгоритмы восстановления динамически искаженных сигналов измерительных систем в скользящем режиме: дис. ... канд. техн. наук / М.Н. Бизяев. - Челябинск, 2004.
9. Иосифов, Д.Ю. Динамические модели и алгоритмы восстановления сигналов измерительных систем с наблюдаемым вектором координат состояния: дис. ... канд. техн. наук / Д.Ю. Иосифов. - Челябинск, 2007.
10. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degener-ate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. - Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.
11. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений Соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислит, технологии. - 2003. - Т. 8, №4. - С. 45 - 54.
12. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера - Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. - 2007. - №3. - С. 22 - 28.
13. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, СВ. Брычев // Изв. вузов. Математика. - 2003. - №8. - С. 46 - 52.

Кафедра «Информационно-измерительная техника»,
Южно-Уральский государственный университет
admin@susu.ac.ru

Кафедра «Уравнения математической физики»,
Южно-Уральский государственный университет
ridyu@susu.ac.ru

Поступила в редакцию 25 сентября 2009 г.