УДК 517.711.3

# КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ЗАДАЧИ ТЕЙЛОРА ДЛЯ МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА

*О.П. Матвеева*

# QUASISTATIONARY TRAJECTORIES OF THE TAYLOR PROBLEM FOR THE MODEL OF THE INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC LIQUID OF THE NONZERO ORDER

*O.P. Matveeva*

Рассматривается задача Тейлора для модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина - Фойгта ненулевого порядка. Данная задача исследуется в рамках теории полулинейных уравнений Соболевского типа. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи и получено описание ее фазового пространства.

*Ключевые слова: уравнение Соболевского типа, фазовое пространство, несжимаемая вязкоупругая жидкость*

Taylor's problem for the model of the dynamics of the Kelvin - Voight incompressible viscoelastic liquid of the nonzero order is considered. This problem is investigated in the frames of the theory of the semilinear Sobolev type equations. The theorem of the existence of the unique solution of this problem is proved and the description of its phase space is received.

*Keywords: equation of Sobolev type, phase space, an incompressible viscoelastic liquid*

## Введение

Система уравнений

$$\begin{cases} (1-\text{æ}\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum\limits_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2 w_l - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla\cdot v, \quad \dfrac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad l = \overline{1,\ K} \end{cases} \tag{1}$$

моделирует динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина - Фойгта порядка $K > 0$ [1].

Функция $v = (v_1, \ldots, v_n), v_i = v_i(x,t)$, $x \in \Omega$ имеет физический смысл скорости течения, функция $\rho = p(x,\ t)$ отвечает давлению. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3,4$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty$. Параметры $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $\text{æ} \in \mathbb{R}$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно. Параметры $\beta_l \in \mathbb{R}_+$ определяют время ретардации (запаздывания) давления, $f = f(f_1, ..., f_n)$, $f_i = f_i(x,t)$ характеризует внешнее воздействие на жидкость.

Задача Тейлора для системы (1) моделирует ситуацию, когда вязкоупругая несжимаемая жидкость Кельвина - Фойгта занимает пространство между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами бесконечной длины [2]. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$ (с кусочно-гладкой границей) выбирается так, чтобы на ее границе $\partial_1\Omega$ (лежащей, например, при $n = 3$ на двух плоскостях $\alpha$ и $\beta$, перпендикулярных оси цилиндров) выполнялось условие периодичности (т.е. $v(x,t)|_{\partial\Omega\cap\alpha} = v(x,t)|_{\partial\Omega\cap\beta}$, $w_l(x,t)|_{\partial\Omega\cap\alpha} = w_l(x,t)|_{\partial\Omega\cap\beta}$, $l = \overline{1,\ K}$, $\partial\Omega \cap (\alpha \cup \beta) = \partial_1\Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$).

Выбирается некоторое стационарное решение $\tilde{v} = \tilde{v}(x)$, $\tilde{w}_l = \tilde{w}_l(x)$ системы (1), удовлетворяющее на $\partial_1\Omega$ условию периодичности, а на $\partial_2\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_1\Omega$ неоднородным условиям Дирихле (например, течение Куэтта), и исследуется динамика отклонения $v = v(x,t)$, $w_l = w_l(x,t)$ от этого стационарного решения, вызванного начальным условием. Поэтому система (1) приобретает вид

$$\begin{cases} (1 - æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v \cdot \nabla)\tilde{v} - (\tilde{v} \cdot \nabla)\, v - (v \cdot \nabla)v + \sum\limits_{l=1}^{K} \beta_l \nabla^2 w_l - \nabla p, \\ 0 = \nabla \cdot v, \quad \dfrac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad l = \overline{1,\ K}. \end{cases} \tag{2}$$

Для системы (1) рассматривается задача Тейлора

$$\begin{cases} v(x,0) = v_0(x), \quad w_l(x,0) = w_l(x) \quad \forall x \in \Omega, \\ v(x,t) = 0, \quad w_l(x,t) = 0 \ \forall (x,t) \in \partial_2\Omega \times \mathbb{R}, \\ v(x,t),\ w_l(x,t) \text{ удовлетворяют условию периодичности на } \partial_1\Omega \times \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

Раннее задача Тейлора для модели нулевого порядка изучалась в [3], а задача Коши - Дирихле для системы (1) рассматривалась в **[4].** Разрешимость задачи(2), (3) исследуется в рамках теории полулинейных уравнений Соболевского типа [5]. В первой части статьи рассматривается формальная схема задачи Коши для указанного класса уравнений, а во второй части задача (2), (3) приводится как конкретная интерпретация формальной схемы.

## 1. Формальная схема

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ - банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ и $M \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{4}$$

для *полулинейного уравнения Соболевского типа*

$$L\dot{u} = M(u). \tag{5}$$

Напомним, что линейный оператор $L : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ называется *бирасщепляющим* , если его ядро $\ker L$ и образ $\operatorname{im} L$ дополняемы в пространствах $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ соответственно . Пусть оператор $L$ бирасщепляющий, обозначим через $M'_{u_0} \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ производную Фреше оператора $M$ в точке $u_0 \in \mathcal{U}$ и введем в рассмотрение цепочки $M'_{u_0}$-присоединенных векторов оператора $L$ , которые будем выбирать из некоторого дополнения $\operatorname{coim} L = \mathcal{U} \ominus \ker L$ к ядру $\ker L$. Введем в рассмотрение условие

(A1). Независимо от выбора $\operatorname{coim} L$ любая цепочка $M'_{u_0}$-присоединенных векторов любого вектора $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ содержит точно $p$ элементов.

Обозначим через $\tilde{L}$ сужение оператора $L$ на $\operatorname{coim} L$. В силу теоремы Банаха о замкнутом графике оператор $\tilde{L} : \operatorname{coim} L \to \operatorname{im} L$ – топлинейный изоморфизм. Положим $\mathcal{U}_0^0 = \ker L$ и построим множества $\mathcal{U}_q^0 = \tilde{A}^q[\mathcal{U}_0^0]$ , $q = \overline{1,\ p}$, где $\tilde{A} = \tilde{L}^{-1}M'_{u_0}$. Очевидно, множества $\mathcal{U}_q^0 \subset \operatorname{coim} L$ являются линейными пространствами, следовательно, образ $\mathcal{F}_p^0 = M'_{u_0}[\mathcal{U}_p^0]$ есть тоже линейное пространство, причем $\mathcal{F}_p^0 \cap \operatorname{im} L = \{0\}$ (если выполнено (A1)). Введем в рассмотрение еще одно условие

(A2). $\mathcal{F}_p^0 \oplus \operatorname{im} L = \mathcal{F}$ .

Обозначим через $Q_p : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_p^0$ проектор вдоль $\operatorname{im} L$ и построим оператор $A = \tilde{L}^{-1}(I - Q_p)M'_{u_0}$ . Заметим, что $A[\mathcal{U}_q^0] = \mathcal{U}_{q+1}^0$, $q = \overline{0,\ p-1}$ , $A[\mathcal{U}_p^0] = \{0\}$. Отсюда следует, что

$$A^q[\mathcal{U}_r^0] = \begin{cases} \{0\}, & q+r > p, \\ \mathcal{U}_{q+r}^0, & q+r \le p. \end{cases} \tag{6}$$

Построим оператор $D$, равный сужению оператора $Q_p M'_{u_0} A^p : \mathcal{U} \to \mathcal{F}_p^0$ на $\mathcal{U}_0^0$ . По построению $D[\mathcal{U}_0^0] = \mathcal{F}_p^0$ и $D \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_0^0; \mathcal{F}_p^0)$. Кроме того, $\ker D = \{0\}$, ибо в противном случае вектор

$$\varphi \in \ker D \setminus \{0\} \subset \ker L \setminus \{0\}$$

имел бы бесконечную цепочку $\{\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots,\ \varphi_p,\ 0,\ \ldots\}$ $M'_{u_0}$-присоединенных векторов. В силу уже цитированной теоремы Банаха оператор $D : \mathcal{U}_0^0 \to \mathcal{F}_p^0$ топлинейный изоморфизм.

Обозначим через $P_0 : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_0^0$ проектор вдоль $\operatorname{coim} L$ и построим операторы $P_q = A^q D^{-1} Q_p M'_{u_0} A^{p-q}$, $q = \overline{1,\ p}$. Операторы $P_q : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_q^0$ – проекторы. Действительно, $\operatorname{im} P_q = \mathcal{U}_q^0$ , $P_q \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ и

$$P_q^2 = A^q(D^{-1}(Q_p M'_{u_0} A^p))D^{-1} Q_p M'_{u_0} A^{p-q} = P_q$$

по определению оператора $D$ . Кроме того, в силу (6) и определения проектора $P_0$

$$P_q P_r = P_r P_q = O, \qquad q, r = \overline{0,\ p}, \qquad q \ne r.$$

Положим

$$\mathcal{U}^0 = \oplus_{q=0}^p \mathcal{U}_q^0 \ , \quad P = \sum_{q=0}^p P_q.$$

Оператор $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ — проектор, $\operatorname{im} P = \mathcal{U}^0$ . Положим $\mathcal{U}^1 = \ker P$, тогда $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ .

Введем в рассмотрение линеалы $\mathcal{F}_q^0 = M'_{u_0}[\mathcal{U}_q^0]$, $q = \overline{0,\ p-1}$, и построим оператор $B = M'_{u_0} \tilde{L}^{-1}(I - Q_p)$ .

Поскольку $B[\mathcal{F}_q^0] = \mathcal{F}_{q+1}^0$, $q = \overline{0,\ p-1}$, $B[\mathcal{F}_p^0] = \{0\}$, то

$$B^q[\mathcal{F}_r^0] = \begin{cases} \{0\}, & q+r > p, \\ \mathcal{F}_{q+r}^0, & q+r \le p. \end{cases} \tag{7}$$

Из (7) аналогично предыдущему следует, что операторы $Q_q = B^q M'_{u_0} D^{-1} Q_p B^{p-q}$, $q = \overline{0,\ p-1}$, являются проекторами на $\mathcal{F}_q^0$, причем

$$Q_q Q_r = Q_r Q_q = O, \qquad r, q = \overline{0,\ p}, \qquad q \ne r.$$

Положим

$$\mathcal{F}^0 = \oplus_{q=0}^p \mathcal{F}_q^0 \ , \quad Q = \sum_{q=0}^p Q_q.$$

Оператор $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ — проектор, поэтому $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ , где $\mathcal{F}^0 = \operatorname{im} Q$ , $\mathcal{F}^1 = \ker Q$.

Заметим, что по построению

$$LA^q D^{-1} Q_p = B^{q-1} M'_{u_0} D^{-1} Q_p \ , \quad q = \overline{1,\ p}. \tag{8}$$

Кроме того,

$$BL = M'_{u_0}(I - P_0) \ . \tag{9}$$

Из (8) , (9) при $q = \overline{1,\ p}$ получаем

$$\begin{aligned} LP_q = LP_q(I-P_0) = LA^qD^{-1}Q_pM'_{u_0}A^{p-q}(I-P_0) = \\ = B^{q-1}M'_{u_0}D^{-1}Q_pB^{p-q}M'_{u_0}(I-P_0) = Q_{q-1}L. \end{aligned} \tag{10}$$

Обратимся к уравнению (5), которое перепишем в виде

$$L\dot{u} = M'_{u_0}u + F(u) \ , \tag{11}$$

где оператор $F = M - M'_{u_0} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U};\mathcal{F})$ по построению. Подействовав на уравнение (11) последовательно проекторами $Q_q$, $q = \overline{0,\ p}$, и $I - Q$, получим в силу (10) эквивалентную систему

$$\begin{cases} L\dot{u}_1^0 = M'_{u_0}u_0^0 + F_0(u), \\ \quad \dots \\ L\dot{u}_p^0 = M'_{u_0}u_{p-1}^0 + F_{p-1}(u), \\ \\ 0 = M'_{u_0}u_p^0 + F_p(u), \\ \\ L\dot{u}^1 = (I-Q)M(u), \end{cases} \tag{12}$$

где $u_q^0 \in \mathcal{U}_q^0$, $F_q(u) = Q_qF(u) + Q_qM'_{u_0}u^1$, $q = \overline{0,p}$, $u^1 \in \mathcal{U}^1$. Итак, доказана

**Лемма 1.** *Пусть операторы* $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U};\mathcal{F})$, *причем* $L$ *— бирасщепляющий оператор, и выполнены условия* (A1) *и* (A2). *Тогда уравнение* (5) *эквивалентно системе* (12).

**Замечание 1.** В условиях леммы 1 оператор $M'_{u_0}$ $(L,p)$-ограничен в точке $u_0$ [6] .

Займемся теперь поисками решения задачи (4), (5).

**Определение 1.** *Решением задачи* (4), (5) *называется вектор-функция*

$$u \in \mathcal{C}^\infty((-t_0;t_0);\mathcal{U}), \quad t_0 = t_0(u_0) > 0,$$

*удовлетворяющая уравнению* (5) *и условию* (4).

Введем два определения.

**Определение 2.** *Банахово* $\mathcal{C}^k$*— многообразие* $\mathcal{B}$ *называется фазовым пространством уравнения* (5) , *если* $\forall u_0 \in \mathcal{B}$ *существует единственное решение* $u = u(t)$ *задачи* (4), (5) *на некотором интервале* $(-t_0, t_0)$ [3].

**Определение 3.** *Решение* $u = u(t)$ *задачи* (4), (5), *для которого выполняется* $L\dot{u}^0 \equiv 0$ $\forall t \in (-t_0;t_0)$, *где* $u^0 = Pu$, *называется квазистационарной траекторией уравнения* (5).

Для выделения квазистационарных траекторий из множества возможных решений задачи (4), (5) наложим еще одно условие.

Рассмотрим множество $\tilde{\mathcal{U}} = \{u \in \mathcal{U} : u_q^0 = \text{const}, \quad q = \overline{1,\ p}\}$. Как нетрудно видеть, $\tilde{\mathcal{U}}$ — полное аффинное многообразие, моделируемое подпространством $\mathcal{U}_0^0 \oplus \mathcal{U}^1$ . Пусть точка $u_0 \in \tilde{\mathcal{U}}$ , через $\mathcal{O}_{u_0}$ обозначим некоторую окрестность $\mathcal{O}_{u_0} \subset \tilde{\mathcal{U}}$ точки $u_0$ .

(A3). $F_q(u) \equiv 0 \qquad \forall u \in \mathcal{O}_{u_0}, \quad q = \overline{1,\ p}.$

**Теорема 1.** *Пусть*
(i) *выполнены условия леммы* 1;
(ii) *точка* $u_0 \in \mathcal{B}$, *где* $\mathcal{B} = \{u \in \tilde{\mathcal{U}} : \quad Q_0 M(u) = 0\}$;
(iii) *выполнено условие* (A3) .

*Тогда существует единственное решение задачи* (4), (5), *являющееся квазистационарной траекторией, причем* $u(t) \in \mathcal{B} \quad \forall t \in (-t_0; t_0)$.

*Доказательство.* Предположим, что решение задачи (4), (5) найдено. Тогда из (12) в силу условия (A3) , следует, что $L\dot{u}^0 \equiv 0$, т.е. решение является квазистационарной траекторией. Установим существование и единственность решения.

В силу леммы 1 и условия (A3) система (12) в окрестности $\mathcal{O}_{u_0}$ редуцируется к виду

$$\begin{cases} 0 = M'_{u_0} u_0^0 + F_0(u), \\ L\dot{u}^1 = (I - Q)M(u). \end{cases} \tag{13}$$

Заметим, что по построению оператор $M'_{u_0} : \mathcal{U}_0^0 \to \mathcal{F}_0^0$ невырожден, и

$$F'_{0u}|_{u=u_0} \equiv O \ ,$$

где через $F'_{0u}$ обозначена производная Фреше оператора $F_0$ в точке $u$ . Отсюда в силу теоремы о неявной функции существует окрестность $\mathcal{O}_{u_0}^1 \subset (I - P)[\mathcal{O}_{u_0}]$ и вектор-функция $\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{u_0}^1; \mathcal{O}_{u_0}^0)$, где $\mathcal{O}_{u_0}^0 = P[\mathcal{O}_{u_0}]$, такие, что

$$u(t) = u_0^0(t) + \sum_{q=1}^{p} u_q^0 + u^1, \quad \text{причем} \quad u(t) \in \mathcal{B} \quad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

Здесь $u_0^0(t) = \delta(u^1) \quad \forall u^1 \in \mathcal{O}_{u_0}^1$ , а $u_q^0 = P_q u_0 = \mathrm{const}$ при $q = \overline{1, \ p}$.

Далее, из (10) следует, что $QL = LP$. Это значит, что оператор $L : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{F}^1$. Обозначим через $L_1$ сужение оператора $L$ на $\mathcal{U}^1$. Оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$ инъективен по построению. Установим его сюрьективность. Пусть $f^1 \in \mathcal{F}^1$ . Тогда существует $\tilde{u} = \tilde{L}^{-1} f^1 \in \operatorname{coim} L$ . Предположим, что $P\tilde{u} \neq 0$, т.е.

$$P\tilde{u} = \sum_{q=1}^{p} P_q \tilde{u} = \sum_{q=1}^{p} \tilde{u}_q^0 \neq 0 \ .$$

Тогда

$$L\tilde{u} = LP\tilde{u} + L(I - P)\tilde{u} = \sum_{q=1}^{p} L\tilde{u}_q^0 + L_1(I - P)\tilde{u} = f^1 \notin \mathcal{F}^1 \ .$$

Противоречие. Итак, оператор $L_1 : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{F}^1$ непрерывно биективен. Через $L^{-1}$ обозначим сужение оператора $\tilde{L}^{-1}$ на $\mathcal{F}^1$.

Из всего сказанного следует, что система (13) на $\mathcal{O}_{u_0}^1$ может быть редуцирована к виду

$$\dot{u}^1 = L^{-1}(I - Q)M(\delta(u^1; t) + (P - P_0)u^0 + u^1) \equiv \Phi(u^1), \tag{14}$$

где $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{u_0}^1; \mathcal{U}^1)$. Однозначная локальная разрешимость задачи Коши $u^1(0) = (I - P)u_0$ для уравнения (14) — классический результат . Искомая квазистационарная траектория имеет вид $u(t) = \delta(u^1(t)) + u^1(t)$, где $u^1 \in \mathcal{C}^\infty((-t_0, t_0); \ \mathcal{O}_{u_0}^1)$ — решение задачи Коши для уравнения (14). □

## 2. Интерпретация формальной схемы

Перейдем от системы (3) к ее модификации

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)\tilde{v} - (\tilde{v}\cdot\nabla)\,v - (v\cdot\nabla)v + \sum\limits_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2 w_l - \bar{p}, \\ 0 = \nabla(\nabla\cdot v), \quad \dfrac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l\in\mathbb{R}_-, \quad l=\overline{1,\ K}. \end{cases} \tag{15}$$

Замена $\bar{p} = \nabla p$ объясняется тем, что в большинстве гидродинамических задач рассмотрение градиента предпочтительнее рассмотрения давления.

Редуцируем задачу (15), (2) к задаче (4), (5). Для этого положим

$$\mathcal{U} = \oplus_{l=0}^{K}\mathcal{U}_l, \qquad \mathcal{F} = \oplus_{l=0}^{K}\mathcal{F}_l, \tag{16}$$

где $\mathcal{U}_0 = \mathbf{H}^2_\sigma\times\mathbf{H}^2_\pi\times\mathbf{H}_p$ , $\mathcal{F}_0 = \mathbf{H}_\sigma\times\mathbf{H}_\pi\times\mathbf{H}_p$ ; $\mathcal{U}_i = \mathbf{H}^2\cap\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 = \mathbf{H}^2_\sigma\times\mathbf{H}^2_\pi$ , $\mathcal{F}_i = \mathbf{L}^2 = \mathbf{H}_\sigma\times\mathbf{H}_\pi$ , $i=\overline{1,\ K}$. Здесь $\mathbf{H}^2_\sigma$ – подпространство соленоидальных векторов пространства $\mathbf{H}^2\cap\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1$, $\mathbf{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$, $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 = (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$; $\mathbf{H}^2_\pi$ – ортогональное ( в смысле $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^n$) дополнение к $\mathbf{H}^2_\sigma$ ; $\mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi$ – замыкания подпространств $\mathbf{H}^2_\sigma$ и $\mathbf{H}^2_\pi$ в норме $\mathbf{L}^2$ соответственно; $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$ .

Обозначим через $\Sigma : \mathbf{L}^2(\Omega)\to\mathbf{H}_\sigma$ ортопроектор вдоль $\mathbf{H}_\pi$. Тогда $\Sigma\in\mathcal{L}(\mathbf{H}^2\cap\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1)$ , причем $\operatorname{im}\Sigma = \mathbf{H}^2_\sigma$, $\ker\Sigma = \mathbf{H}^2_\pi$. Элемент пространства $\mathcal{U}$ – вектор $\vec{u}(x,t)$ – будет иметь вид $\vec{u}(x,t) = (u_\sigma,\ u_\pi,\ u_p,\ w_1,\ \ldots,\ w_K)$, где $u_\sigma = \Sigma v$ , $u_\pi = (I-\Sigma)v$ , $u_p = \bar{p}$ , и $\vec{u}(0) = (u_{\sigma_0},\ u_{\pi_0},\ u_{p_0},\ w_{1_0},\ \ldots,\ w_{K_0})$, где $u_{\sigma_0} = \Sigma v_0$ , $u_{\pi_0} = (I-\Sigma)v_0$ , $u_{p_0} = \bar{p}_0$ , $w_{i_0} = w_i(x,0)$ , $i=\overline{1,\ K}$, $\vec{u}(x,t) = 0\quad\forall(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}$ .

Операторы $L$ , $M$ : $\mathcal{U}\to\mathcal{F}$ определим формулами

$$L = \begin{pmatrix} \hat{L} & 0 \\ 0 & E_K \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где $\hat{L} = \begin{pmatrix} \Sigma A_æ\Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi A_æ\Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Pi = I-\Sigma$, $A_æ = 1-æ\nabla^2$ ;

$$M(\vec{u}) = M_1\vec{u} + M_2(\vec{u}), \tag{18}$$

где $M_1 = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$, $M_{11} = \begin{pmatrix} \nu\Sigma\Delta & \nu\Sigma\Delta & 0 \\ \nu\Pi\Delta & \nu\Pi\Delta & -I \\ \Sigma C & \Pi C & 0 \end{pmatrix}$, $M_{12} = \begin{pmatrix} \beta_1\Sigma\Delta & \ldots & \beta_K\Sigma\Delta \\ \beta_1\Pi\Delta & \ldots & \beta_K\Pi\Delta \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, $M_{21}$ содержит $K$ строк вида ( $I,\ I,\ 0$ ), $M_{22} = \operatorname{diag}[\alpha_1,\ldots,\alpha_K]$; $M_2 = (\Sigma B(u_\sigma+u_\pi),\ \Pi B(u_\sigma+u_\pi),\ 0,\ \ldots,\ 0)^T$. Здесь $B(u_\sigma+u_\pi) := -((u_\sigma+u_\pi)\cdot\nabla)\tilde{v} - (\tilde{v}\cdot\nabla)\,(u_\sigma+u_\pi) - ((u_\sigma+u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma+u_\pi)$, $C(u_\sigma+u_\pi) := \nabla(\nabla\cdot(u_\sigma+u_\pi))$.

**Лемма 2.** *Пусть пространства* $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ *определены формулами* (16), *причем* $n = 2,\ 3,\ 4$, *а операторы* $L$ , $M$ : $\mathcal{U}\to\mathcal{F}$ *формулами* (17) , (18). *Тогда:* (i) *оператор* $L\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ , *причем, если* $æ^{-1}\notin\sigma(-\nabla^2)$ , *то* $\ker L = \{0\}\times\{0\}\times\mathbf{H}_p\times\underbrace{\{0\}\ldots\{0\}}_{K}$, $\operatorname{im} L = \mathbf{H}_\sigma\times\mathbf{H}_\pi\times\{0\}\times\mathcal{F}_1\times\ldots\times\mathcal{F}_K$ ; (ii) *оператор* $M\in C^\infty(\mathcal{U};\mathcal{F})$.

*Доказательство.* Утверждение (i) леммы 1 очевидно, а утверждение (ii) проверяется непосредственно. Укажем лишь, что

$$M_u' = M_1 + M_3, \tag{19}$$

где $M_3 = \begin{pmatrix} \hat{M}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{M}_3 = \begin{pmatrix} \Sigma B_\sigma & \Sigma B_\pi \\ \Pi B_\sigma & \Pi B_\pi \end{pmatrix}$, $B_\sigma(B_\pi)$ – частная производная Фреше оператора $B$ в точке $u_\sigma + u_\pi$ по $u_\sigma(u_\pi)$ . Очевидно, $\forall n \geq 3 \quad \forall u \in \mathcal{U} \quad M_u^{(n)} \equiv 0$ . □

И тем самым закончили редукцию задачи (15), (3) к задаче (4), (5).

Далее надо проверить выполнимость условий (A1) — (A3). Обозначим через $A_{æ\sigma}$ сужение оператора $\Sigma A_æ \Sigma$ на $\mathbf{H}_\sigma^2$ .

**Лемма 3.** *Пусть выполнены условия леммы* 2, *причем* $\ker A_{æ\sigma} = \{0\}$. *Тогда каждый вектор* $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ *имеет точно один* $M_u'$*-присоединенный вектор независимо от точки* $u \in \mathcal{U}$.

*Доказательство.* Пусть вектор $\varphi = (0,\ 0,\ \varphi_p,\ 0,\ \ldots\ ,0) \in \ker L, \quad \varphi_p \neq 0$ . Найдем вектор $\psi \in \mathcal{U}$ такой, что $L\psi = M_u'\varphi$. Из (17) и (19) следует система

$$A_{æ\sigma}\psi_\sigma = 0, \qquad \Pi A_æ \psi_\pi = -\varphi_p. \tag{20}$$

Поэтому из (20) получаем $\psi_\sigma = 0$ . Следовательно, если $\psi_\pi = 0$ , то $\varphi_p = 0$ . Итак, $\psi_\pi \neq 0$.

Пусть

$$\tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{L}^{-1} & 0 \\ 0 & E_K \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $\hat{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma A_æ^{-1}\Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi A_æ^{-1}\Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Поскольку $\tilde{L}^{-1}L = \begin{pmatrix} \Sigma_\Pi & 0 \\ 0 & E_K \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, где $\Sigma_\Pi = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а $L\tilde{L}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ и формально имеет такой же вид, то $\psi_\sigma = 0$, $\psi_\pi = -\Pi A_æ^{-1}\varphi_p$ , компонента $\psi_p$ вектора $\psi$ произвольна, а остальные $K$ компонент вектора $\psi$ равны нулю. Далее $M_u'\psi = (\Sigma(\tilde{B}_\sigma\psi_\sigma + \tilde{B}_\pi\psi_\pi),\ \Pi(\tilde{B}_\sigma\psi_\sigma + \tilde{B}_\pi\psi_\pi) - \psi_p,\ C\psi_\pi,\ \ldots)^T$, где $\tilde{B}(u_\sigma + u_\pi) := \nu\nabla^2(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla)\tilde{v} - (\tilde{v}\cdot\nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi))\cdot\nabla))(u_\sigma + u_\pi)$ , $\tilde{B}_\sigma(\tilde{B}_\pi)$ — частная производная Фреше оператора $\tilde{B}$ в точке $u_\sigma + u_\pi$ по $u_\sigma(u_\pi)$ . Так как $\psi_\pi \neq 0$ , то $C\psi_\pi \neq 0$ . Следовательно, $M_u'\psi \notin \operatorname{im} L$ независимо от $u \in \mathcal{U}$ . Итак, условие (A1) выполняется, причем $p = 1$. □

Теперь проверим условие (A2). Обозначим через $A_{æ\pi}$ сужение оператора $\Pi A_æ^{-1}\Pi$ на $\mathbf{H}_\pi$ . Справедлива

**Лемма 4.** [5]. *В условиях леммы* 3 *оператор* $A_{æ\pi} : \mathbf{H}_\pi \to \mathbf{H}_\pi^2$ *— топлинейный изоморфизм.*

В силу леммы 2 оператор $L$ из (17) бирасщепляющий. Положим $\mathcal{U}_0^0 = \ker L$, $\operatorname{coim} L = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \{0\} \times \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_K$. Построим линеалы $\mathcal{F}_0^0 = M_{u0}'[\mathcal{U}_0^0] = \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{K} = \{0\} \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{K} \subset \operatorname{im} L$, $\mathcal{U}_1^0 = \tilde{L}^{-1}[\mathcal{F}_0^0] = \Sigma A_æ^{-1}[\mathbf{H}_p] \times A_{æ\pi}[\mathbf{H}_p] \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{K} = \Sigma A_æ^{-1} A_{æ\pi}^{-1}[\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{K} \subset \operatorname{coim} L$ в силу леммы 4; $\mathcal{F}_1^0 = M_{u0}'[\mathcal{U}_1^0] = \Sigma\tilde{B}_0 A_æ^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \Pi\tilde{B}_0 A_æ^{-1}[\mathbf{H}_p] \times C A_æ^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{K}$.

Пусть $\tilde{C}$ — сужение оператора $C$ на $\mathbf{H}^2_\pi$. Поскольку существует оператор $\tilde{C}^{-1}$, то в силу леммы 4 $\mathcal{F}^0_1 = \Sigma\tilde{B}_0 A_æ^{-1} A_{æ\pi}^{-1}\tilde{C}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \Pi\tilde{B}_0 A_æ^{-1} A_{æ\pi}^{-1}\tilde{C}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{K} \not\subset \operatorname{im} L$ .

Здесь и выше $\tilde{B}_0$ — производная Фреше оператора $\tilde{B}$ в точке $u_{\sigma 0} + u_{\pi 0}$, а оператор $\tilde{L}^{-1}$ определен в (21). Построим операторы

$$P_0 = \begin{pmatrix} \hat{P}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} \hat{P}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $\hat{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi \end{pmatrix}$, $\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & P_1^{12} & 0 \\ 0 & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_1^{12} = \Sigma A_æ^{-1} A_{æ\pi}^{-1}\Pi$;

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \hat{Q}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где $\hat{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Q_0^{21} & \Pi & Q_0^{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Q_1^{13} \\ 0 & 0 & Q_1^{23} \\ 0 & 0 & \Pi \end{pmatrix}$, $Q_1^{13} = \Sigma\tilde{B}_0 A_æ^{-1} A_{æ\pi}^{-1}\tilde{C}^{-1}\Pi$ , $Q_1^{23} = \Pi\tilde{B}_0 A_æ^{-1} A_{æ\pi}^{-1}\tilde{C}^{-1}\Pi$ , $Q_0^{21} = -\Pi A_æ A_{æ\sigma}^{-1}\Sigma$ , $Q_0^{23} = -Q_0^{21} Q_1^{13} - Q_1^{23}$. Легко видеть, что операторы $P_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ и $Q_k \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ , $k = 0,\ 1$, определенные в (22), (23), — проекторы , причем $\operatorname{im} P_k = \mathcal{U}^0_k$, $\operatorname{im} Q_k = \mathcal{F}^0_k$ , $k = 0, 1$ и $P_0 P_1 = P_1 P_0 = 0$, $Q_0 Q_1 = Q_1 Q_0 = 0$. Кроме того, $\ker Q_1 = \operatorname{im} L$ и, значит, $\mathcal{F}^0_1 \oplus \operatorname{im} L = \mathcal{F}$, т.е. условие (А2) выполняется.

Для проверки условия (А3) построим множество $\tilde{\mathcal{U}} = \{\ u \in \mathcal{U}\ :\ P_1 u = \mathrm{const}\} = \{\ u \in \mathcal{U}\ :\ u_\pi = \mathrm{const}\}$ . В нашем случае условие(А3) состоит из единственного равенства $Q_1 M(u) = (Q_1^{13} C(u_\sigma + u_\pi),\ Q_1^{23} C(u_\sigma + u_\pi),\ C(u_\sigma + u_\pi),\ 0, \ldots,\ 0)^T = 0$, которое выполняется тождественно , если $u_\pi = 0$ . Итак, если положить $\tilde{\mathcal{U}} = \{u \in \mathcal{U}\ :\ u_\pi = 0\}$ , то условие (А3) имеет место.

Построим множество $\mathcal{B}$ . Согласно теореме 1, $\mathcal{B} = \{u \in \tilde{\mathcal{U}}\ : Q_0 M(u) = 0\}$. Поскольку при $u_\pi = 0$ $Q_0 M(\vec{u}) = 0 \Longleftrightarrow (Q_0^{21}\Sigma + \Pi)\tilde{B}(u_\sigma) - u_p = 0$ , и

$$Q_0^{21}\Sigma + \Pi = A_{æ\pi}^{-1}\Pi A_æ^{-1}\Sigma + A_{æ\pi}^{-1}\Pi A_æ^{-1}\Pi = A_{æ\pi}^{-1}\Pi A_æ^{-1}, \tag{24}$$

то

$$\mathcal{B} = \{u \in \tilde{\mathcal{U}} : A_{æ\pi}^{-1}\Pi A_æ^{-1}\tilde{B}(u_\sigma) = u_p,$$

$$u_\pi = 0\ , u_\sigma \in \mathbf{H}^2_\sigma\ ,\ u_i \in \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi\ ,\ \ i = \overline{1,\ K}\}. \tag{25}$$

Для доказательства (24) заметим, что $\Pi A_æ^{-1} A_{æ\sigma}\Sigma + \Pi A_æ^{-1}\Pi A_æ\Sigma = \Pi A_æ^{-1}(\Sigma A_æ + \Pi A_æ)\Sigma = 0$. Отсюда следует, что $\Pi A_æ^{-1} A_{æ\sigma}\Sigma = -A_{æ\pi}\Pi A_æ\Sigma$ , $A_{æ\pi}^{-1}\Pi A_æ^{-1} A_{æ\sigma}\Sigma = -\Pi A_æ\Sigma$ , $A_{æ\pi}^{-1}\Pi A_æ^{-1}\Sigma = -\Pi A_æ A_{æ\sigma}^{-1}\Sigma = Q_0^{21}\Sigma$ . Итак, доказана

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия леммы* 3. *Пусть* $u_0 \in \mathcal{B}$ (25). *Тогда для некоторого* $t_0 = t_0(u_0)$ *существует единственное решение задачи* (15), (3), *являющееся квазистационарной траекторией,* $u = (u_\sigma,\ 0,\ \bar{p},\ w_1,\ \ldots,\ w_k)$ *класса* $\mathcal{C}^\infty((-t_0, t_0); \mathcal{B})$ *и такое, что* $u \in \mathcal{B}$ *для всех* $t \in (-t_0; t_0)$.

*Автор выраcтает признательность профессорам Т.Г. Сукачевой и Г.А. Свиридюку за внимание к данным исследованиям и обсуждение результатов.*

## Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Тр. мат. ин-та АН СССР. - 1988. - № 179. - С. 126 - 164.
2. Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. - М.: Мир, 1980.
3. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сиб. мат. журн. - 1990. - Т. 31, № 5. - С. 109 - 119.
4. Сукачева, Т.Г. Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравнения. - 1997. - Т. 33, № 4. - С. 552 - 557.
5. Сукачева, Т.Г. Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук /Т.Г. Сукачева, Новгород, гос. ун-т. - Великий Новгород, 2004. - 249 с.
6. Свиридюк, Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А Свиридюк., Т.Г. Сукачева // Вестн. МаГУ. - 2005. - № 8. - С. 5 - 33.

Кафедра математического анализа,
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого
oltan.72@mail.ru

*Поступила в редакцию 25 февраля 2010 г.*